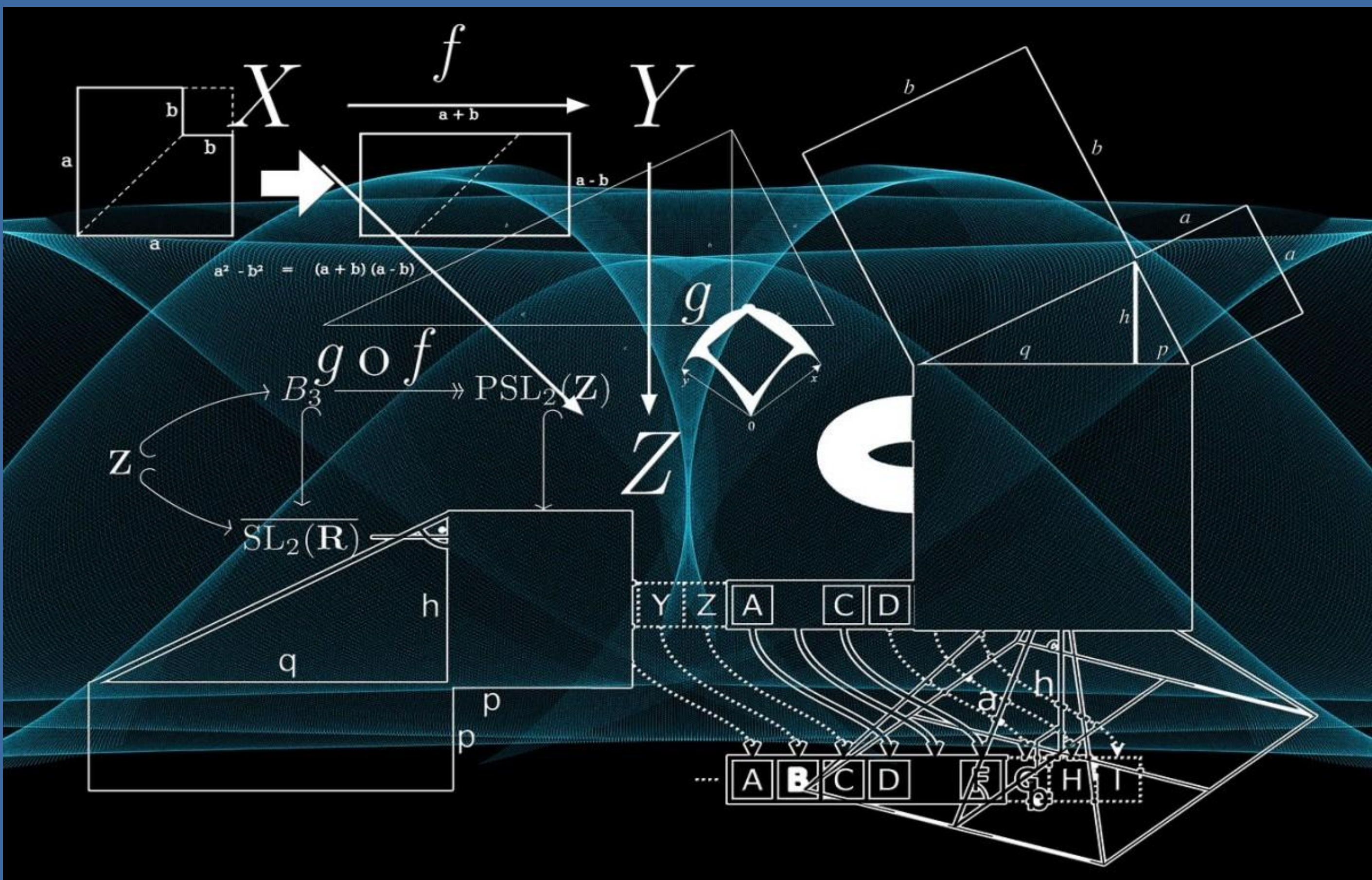
Μαθηματικά Γ΄Λυκείου

Α΄ Τεύχος



Ομάδα προσανατολισμού :

- Θετικών σπουδών
- Οικονομίας και Πληροφορικής

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Α΄ΤΕΥΧΟΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ :
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σε κάθε ενότητα αυτού του βιβλίου θα βρείτε :

- Βασική θεωρία με τη μορφή ερωτήσεων - απαντήσεων
- Παρατηρήσεις και σχόλια στη θεωρία
- Μεθοδολογίες για τη λύση ασκήσεων
- Λυμένα παραδείγματα σε κάθε μεθοδολογία
- Ασκήσεις όλων των επιπέδων δυσκολίας
- Επιλεγμένες ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο
- Επαναληπτικά θέματα από το study4exams
- Ερωτήσεις σωστού – λάθους
- Ισχυρισμούς & αντιπαραδείγματα βασισμένα στο σχολικό βιβλίο
- Θέματα πανελληνίων εξετάσεων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o} : ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o} : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α ;**

Απάντηση : **(2005 ΕΣΠ. Β΄, 2018Β, 2019)**

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το Α** μια διαδικασία (κανόνα) *f* , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό *y*. Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

Σχόλια :

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε : $f:\mathrm{A} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$.

- Το γράμμα *x*, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του *Α* λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα *y*, που παριστάνει την τιμή της *f* στο *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης *f* συνήθως συμβολίζεται με $\boldsymbol{D_f}$.
- Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της *f* σε όλα τα $x \in \mathrm{A}$, λέγεται **σύνολο τιμών** της *f* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

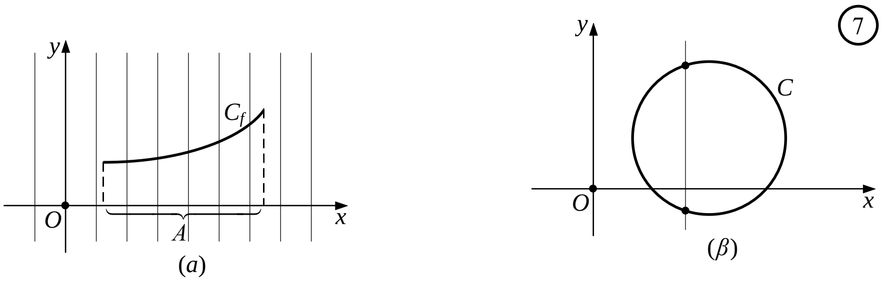
Απάντηση :

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, με $x \in A$.

Σχόλια :

- Η γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f .
- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- Επειδή κάθε $x \in \mathrm{A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της *f* με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της *f* το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).

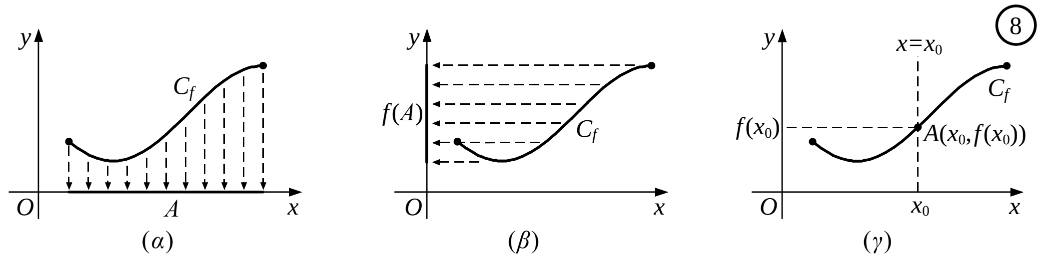


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε :

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της C_f.

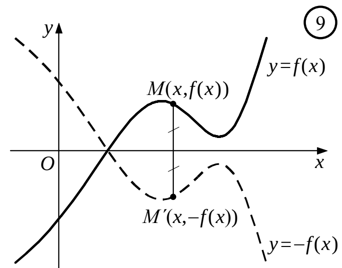
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

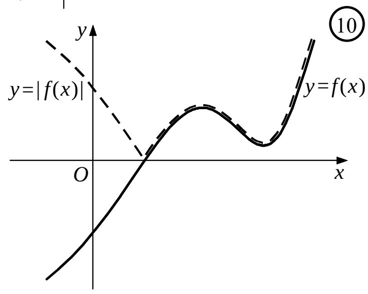


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(-x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = f(x)$.

3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

α) $f(x)=\alpha x+\beta$ β) $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$ γ) $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$

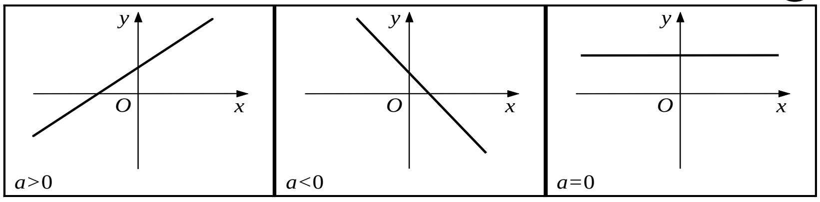
δ) $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.

Απάντηση :

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

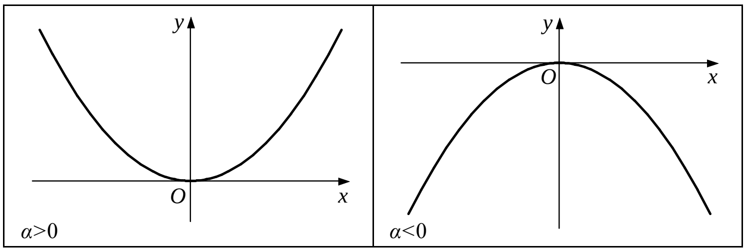
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

11



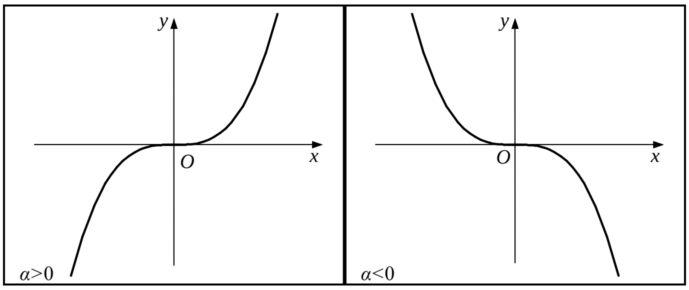
β)Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$.

12



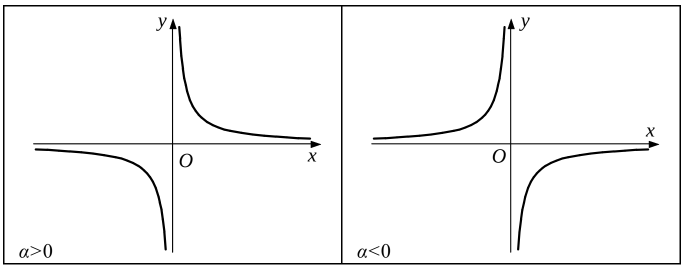
γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$.

13

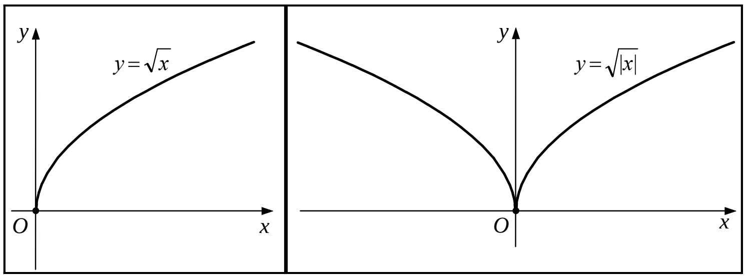


δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$.

14



ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{-x}\,, & x<0\\ \sqrt{x}\,, & x\geq 0\end{cases}$.

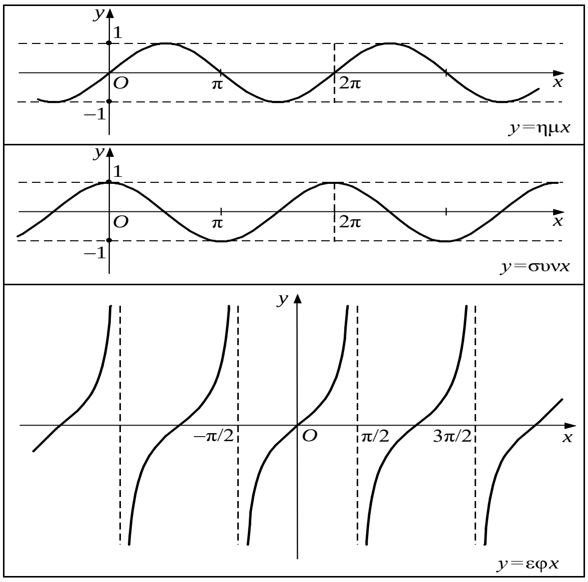


15

4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :
α) $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$
β) $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ γ) $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$

Απάντηση :
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

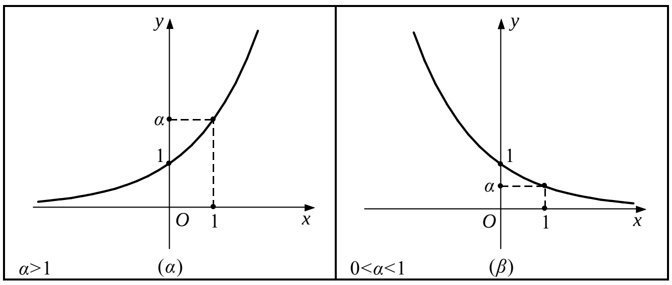
α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$, $f(x)=\varepsilon\phi x$



16
(α)
(β)
(γ)

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu\, x$ είναι περιοδικές με περίοδο $\mathrm{T}=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο $\mathrm{T}=\pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$.



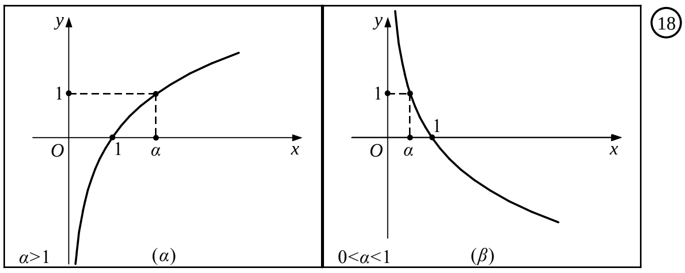
17

Ιδιότητες :

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\alpha > 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$



Ιδιότητες :

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7)Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$, $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln \alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες ;

Απάντηση : **(2007, 2008 ΟΜΟΓ, 2012 Β΄, 2016, 2021)**

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Σχόλια :

- Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to \Re$ και $g : B \to \Re$ και Γ ένα υποσύνολο του $A \cap B$. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ είναι $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ.
- Για να εξετάσουμε αν δυο συναρτήσεις f,g είναι ίσες, πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και ύστερα να ελέγξουμε αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Οι ίσες συναρτήσεις έχουν την ίδια γραφική παράσταση.
- Είναι λάθος να πούμε ότι «δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες, αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο». Π.χ. οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$, $x \in A = \{-1,1\}$ είναι ίσες, χωρίς να έχουν τον ίδιο τύπο.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f,g;

Απάντηση :

Ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, διαφορά $f-g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, $(fg)(x)=f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

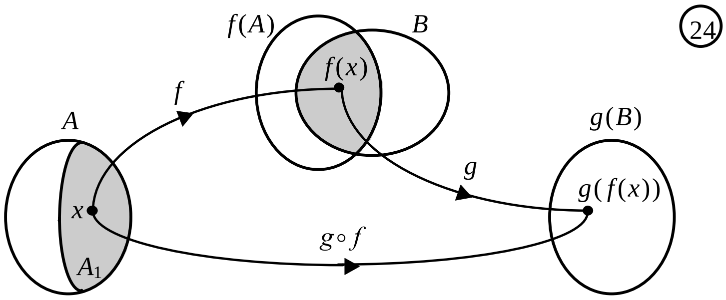
Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού Α και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο :

$\{x \mid x\in A$ και $x\in B$, με $g(x)\neq 0\}$.

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

Απάντηση :

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x)=g(f(x))$.



Σχόλια :

α) Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) • Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά** ίσες.

• Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$. Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}$	$P(x)\geq 0$
$f(x)=\ln(P(x))$	$P(x)>0$
$f(x)=(P(x))^{Q(x)}$	$P(x)>0$
$f(x)=\varepsilon\phi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in Z$
$f(x)=\sigma\phi(P(x))$	$P(x)\neq \kappa\pi\ ,\ \kappa\in Z$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$

ii. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

iv. $f(x)=\ln(1-e^x)$

v. $f(x)=(2-x)^{\sqrt{x-1}}$

vi. $f(x)=\ln(\pi^2-x^2)-\varepsilon\phi x+x^{2016}$

Λύση :

i. Πρέπει : $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \,\&\, x\neq 2$. Άρα $D_f=\Re-\{1,2\}$

ii. Πρέπει : $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq 2\end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,2]$. Άρα $D_f=[1,2]$

iii. Πρέπει : $x\neq 0$ (1) και $1-x^2\geq 0$ (2)

Έχω $1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$ (2)

Από (1) & (2) $D_f=[-1,0)\cup(0,1]$.

iv. Πρέπει : $1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow x<0$. Άρα $D_f=(-\infty,0)$

v. Πρέπει : $\begin{cases} 2-x>0 \\ x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow x\in[1,2)$ Άρα $D_f=[1,2)$

vi. Πρέπει :

- $\pi^2 - x^2 > 0$, είναι $\pi^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\pi$

x	-∞	$-\pi$		π	+∞
$\pi^2 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\pi, \pi)$

- $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$

Συναληθεύοντας τους παραπάνω περιορισμούς έχω :

$x \in (-\pi,\pi) \Leftrightarrow -\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\pi < \kappa\pi + \frac{\pi}{2} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} < \kappa\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \kappa < \frac{1}{2}$

Όμως $\kappa \in Z$ άρα $\kappa = -1$ $\acute{\eta}$ $\kappa = 0$

Για $\kappa = -1$ είναι $x \neq -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2}$

Για $\kappa = 0$ είναι $x \neq \frac{\pi}{2}$

Άρα $D_f = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x-3}$

ii. $f(x) = \frac{2x+1}{x^3 - 8} + \frac{1}{x^3 + 1}$

iii. $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

iv. $f(x) = \frac{e^x + x^5}{5 - e^x}$

v. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

vi. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

vii. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x - 1}}$

viii. $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

ix. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

3) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \ln(-x^2 + 3x + 10)$

ii. $f(x) = \ln(4 - x^2)$

iii. $f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)$

iv. $f(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)$

v. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{1-|x|}$

vi. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sigma\upsilon\nu 2x-1}$

vii. $f(x)=\dfrac{x}{|x-3|-2}+\dfrac{3}{|7-2x|-1}$

viii. $f(x)=\sqrt{|x-3|-5}+\sqrt{7-|x-4|}$

4) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=(x^2-25)^{x^2+e^x}$

ii. $f(x)=(16-x^2)^{3x^5+\ln x}$

iii. $f(x)=(e^x-1)^{x^{2015}+\sqrt{2-x}}$

iv. $f(x)=(9-x^2)^{\sqrt{|x|-1}}$

v. $f(x)=\ln(2\pi x-x^2)-\varepsilon\varphi x$

5) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

ii. $f(x)=\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt{2-x}}$

iii. $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln^2 x-\ln x}$

iv. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\ln(x-1)}$

v. $f(x)=\dfrac{\ln(x+5)}{x^2-3x-4}$

vi. $f(x)=\dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

vii. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-9)}{x-7}$

viii. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-4}$

ix. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\ln(x+3)}$

x. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{\ln(e^x-1)}+\ln(x^2+1)-\dfrac{\eta\mu x}{e^x+2017}$

xi. $f(x)=\sqrt{\ln x-1}+\dfrac{x^2}{e^x+1}$

6) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

7) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)$.

8) Να βρείτε τις τιμές $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να έχουν πεδίο ορισμού του $\mathbb{R}$.

i. $f(x)=\dfrac{x-20}{x^2-\lambda x+4}$

ii. $f(x)=\ln\left(3x^2-2\lambda x+3\right)$

9) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{\dfrac{4}{\rho}x^2+\alpha x+\dfrac{\rho}{2}}$ με $\rho,\alpha\in\mathbb{Z}$ και $\rho<\alpha$, $\rho\neq 0$. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές των $\rho,\alpha\in\mathbb{Z}$.

10) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x, & \alpha\nu\ -5\le x\le -2 \\ |x|+\beta, & \alpha\nu\ -2<x<6 \end{cases}$ για την οποία ισχύει : $f(-4)=8$ και $f(-1)=0$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να βρείτε τους αριθμούς α,β
iii. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f\left(f(-3)\right)$
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

11) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & \alpha\nu\ -6\le x<-1 \\ x^2+\beta, & \alpha\nu\ -1\le x<7 \end{cases}$ για την οποία ισχύει : $f(-2)=5$ και $f(5)=24$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να βρείτε τους αριθμούς α,β
iii. Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f\left(f(-3)\right)$
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

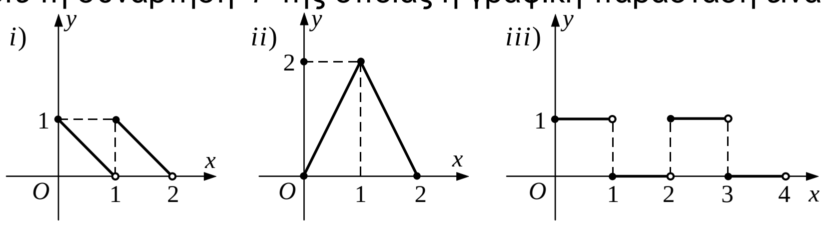
12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+1}{x-1}, & x\neq 1 \\ \alpha^2-3, & x=1 \end{cases}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Να υπολογίσετε το α ώστε $f(-1)=f(1)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

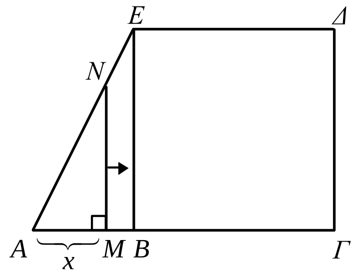
13) Σύρμα μήκους $\ell = 20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη *x* cm και $(20-x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του *x*.

14) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση *f* της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

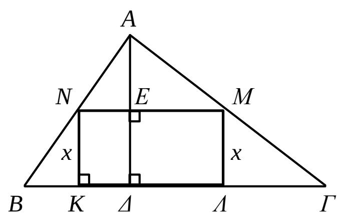


15) Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης *x* cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4€. ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25€. ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του *x*. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm, και ύψος 8 cm;

16) Στο διπλανό σχήμα είναι $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{A\Gamma}=3$ και $\Gamma\Delta=2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x=\mathrm{AM}$, όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.



17) Ένα ορθογώνιο *ΚΛΜΝ* ύψους *x* cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο *ΑΒΓ* βάσης $B\Gamma = 10$ cm και ύψους $A\Delta = 5$ cm. Να εκφράσετε το εμβαδό *Ε* και την περίμετρο *P* του ορθογωνίου ως συνάρτηση του *x*.



18) Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός *P* της πόλης είναι *x* εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2+x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε *t* έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t+4}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i. Να εκφράσετε τον αριθμό *N* των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του *t*.
ii. Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα ;

19) Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$\mathrm{E}(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0,8).$$

(Θέμα Γ1. 2018)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:\mathrm{A}\to\Re$ και $g:\mathrm{B}\to\Re$. Αν είναι $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\emptyset$, τότε με πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις :

- **Άθροισμα**, με $D_{f+g}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- **Διαφορά**, με $D_{f-g}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και τύπο $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- **Γινόμενο**, με $D_{f\cdot g}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ και τύπο $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- Τέλος με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}-\{x/g(x)=0\}$ ορίζουμε τη συνάρτηση **Πηλίκο**, με $D_{\frac{f}{g}}=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}-\{x/g(x)=0\}$ και τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Αν $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\ln(2-x)$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\quad f-g,\quad f\cdot g,\quad \frac{f}{g},\ \frac{1}{f}$.

Λύση :
Αρχικά πρέπει να βρούμε τα πεδία ορισμού των f,g.
Για την $f(x)=\sqrt{x-1}$ πρέπει $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ άρα $D_f=[1,+\infty)$
Για τη $g(x)=\ln(2-x)$ πρέπει $2-x>0\Leftrightarrow x<2$ άρα $D_g=(-\infty,2)$

- $D_{f+g}=D_f\cap D_g=[1,2)$ και $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x-1}+\ln(2-x)$
- $D_{f-g}=D_f\cap D_g=[1,2)$ και $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x-1}-\ln(2-x)$
- $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=[1,2)$ και $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\ln(2-x)$
- Για την $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον $g(x)\neq 0\Leftrightarrow \ln(2-x)\neq 0\Leftrightarrow \ln(2-x)\neq\ln 1\Leftrightarrow 2-x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 1$

  Άρα $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x/g(x)=0\}=(1,2)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\ln(2-x)}$.
- Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f}$ είναι το σύνολο $D_{\frac{1}{f}}=\{x\in D_f\quad \kappa\alpha\iota\quad f(x)\neq 0\}$

  Δηλαδή $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και
  $f(x)\neq 0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\neq 0\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

  Άρα $D_{\frac{1}{f}}=\{x\in D_f\quad \kappa\alpha\iota\quad f(x)\neq 0\}=(1,+\infty)$ και ο τύπος της είναι $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21)Αν $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\frac{x^2-4}{x^2-3x}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\frac{f}{g}$.

22)Αν $f(x)=\ln(x^2-1)$ και $g(x)=\ln x$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\frac{f}{g}$.

23)Αν $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{4-x}}$ και $g(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x}}$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \dfrac{f}{g}$.

24)Αν $f(x)=\begin{cases} x-4, & \alpha\nu\ \ x\le 2 \\ 3x-2, & \alpha\nu\ \ x>2 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} 2-x, & \alpha\nu\ \ x\le -1 \\ x+1, & \alpha\nu\ \ x>-1 \end{cases}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

25)Αν $f(x)=\begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ \ x<1 \\ 2x, & \alpha\nu\ \ x\ge 1 \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x-1, & \alpha\nu\ \ x\le 2 \\ -x^2, & \alpha\nu\ \ x>2 \end{cases}$. Να βρείτε τη συνάρτηση $f+g$.

26)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=e^x-1$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f, g, f\cdot g, \dfrac{f}{g}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $(f\cdot g)(x)=0$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)>0$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f (συμβ. C_f) ισχύουν τα παρακάτω :

- Για όλα τα σημεία $\mathrm{M}(x,y)$ που ανήκουν στη C_f ισχύει $y=f(x)$. Δηλ. $\mathrm{M}(x,f(x))$. Πιο συγκεκριμένα το σημείο $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ ανήκει στη C_f, αν και μόνο αν $f(x_0)=y_0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x)>0$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x)<0$
- Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g $\Leftrightarrow f(x)>g(x)$
- Η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g $\Leftrightarrow f(x)<g(x)$
- <u>ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΜΕ ΑΞΟΝΕΣ</u>
  - Η C_f τέμνει τον x΄x σε σημεία της της μορφής $\mathrm{M}(x_0,0)$, οπότε για να τα βρούμε λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)=0$
  - Η C_f τέμνει τον y΄y σε σημεία της της μορφής $\mathrm{M}(0,y_0)$, οπότε για να τα βρούμε, βάζουμε όπου x το 0 δηλ. υπολογίζουμε το $f(0)$
- Για να βρούμε κοινά σημεία C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.
- <u>Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης :</u>
  Αν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης :
  - $g(x)=f(x)+c$ ή $g(x)=f(x)-c$, $c>0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f κατακόρυφα κατά c μονάδες προς τα πάνω ή προς τα κάτω αντίστοιχα.
  - $g(x)=f(x-c)$ ή $g(x)=f(x+c)$, $c>0$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε την C_f οριζόντια κατά c μονάδες προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά αντίστοιχα.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(-x)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=x^2+\alpha x+\alpha-4$, με $\alpha\in\Re$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-3,5)$, να βρείτε :

i. τον αριθμό α
ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iii. τα σημεία όπου η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα x΄x
iv. τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=-4x+1$.
v. τη σχετική θέση των C_f και C_h όπου $h(x)=\dfrac{2x^2-|x-3|}{2}$.

Λύση :

i. $f(x)=x^2+\alpha x+\alpha-4$, με $\mathrm{A}_f=\Re$.
Η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-3,5)$ άρα $f(-3)=5\Leftrightarrow 9-3\alpha+\alpha-4=5\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0$, δηλ. $f(x)=x^2-4$.

ii. Η C_f τέμνει τον x΄x για $y=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$ άρα στα σημεία $\mathrm{A}(2,0)\quad \kappa\alpha\iota\quad \mathrm{B}(-2,0)$
Η C_f τέμνει τον y΄y για $x=0$ άρα $f(0)=-4$ δηλ. στο σημείο $\Gamma(0,-4)$.

iii. Η C_f βρίσκεται κάτω από το άξονα x΄x άρα $f(x)<0\Leftrightarrow x^2-4<0$
Είναι : $x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-4<0\Leftrightarrow x\in(-2,2)$

iv. Για να βρω τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=-4x+1$ (δηλ. τη συνάρτηση $g(x)=-4x+1$), θα λύσω την εξίσωση : $f(x)=y\Leftrightarrow f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4=-4x+1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\Leftrightarrow x=1\ \acute{\eta}\ x=-5$, άρα στα σημεία $\Delta(1,f(1))\to\Delta(1,-3)$ και $\mathrm{E}(-5,f(-5))\to\mathrm{E}(-5,21)$.

v. Για να βρω τη σχετική θέση των C_f και C_h, θεωρώ τη συνάρτηση : $\phi(x)=f(x)-h(x)=x^2-4-\dfrac{2x^2-|x-3|}{2}$, $\mathrm{A}_h=\Re$.
Η C_f τέμνει τη C_h όταν :

• $\phi(x)=0\Leftrightarrow f(x)=h(x)=x^2-4=\dfrac{2x^2-|x-3|}{2}\Leftrightarrow 2x^2-8=2x^2-|x-3|\Leftrightarrow|x-3|=8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=8\Leftrightarrow x=11\\ \acute{\eta}\\ x-3=-8\Leftrightarrow x=-5\end{cases}$ δηλ. στα σημεία : $\mathrm{Z}(11,f(11))\ \acute{\eta}\ \mathrm{Z}(11,117)$ και $\mathrm{E}(-5,f(-5))\ \acute{\eta}\ \mathrm{E}(-5,21)$

- Η C_f είναι πάνω από τη C_h, όταν :

$$f(x) > h(x) \Leftrightarrow \phi(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 > 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 8 \Leftrightarrow x > 11 \\ ή \\ x-3 < -8 \Leftrightarrow x < -5 \end{cases}$$ δηλ. $x \in (-\infty,-5) \cup (11,+\infty)$.

- Η C_f είναι κάτω από τη C_h, όταν :

$$f(x) < h(x) \Leftrightarrow \phi(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < \frac{2x^2 - |x-3|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 < 2x^2 - |x-3| \Leftrightarrow |x-3| < 8 \Leftrightarrow -8 < x-3 < 8 \Leftrightarrow -5 < x < 11 \Leftrightarrow x \in (-5,11).$$

28)(Άσκηση 2 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Για ποιες τιμές του $x \in \Re$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x όταν :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ii. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ iii. $f(x) = e^x - 1$

<u>Λύση :</u>

i. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0$

Έχω $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, ή, x = 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2 - 4x + 3 > 0$ τότε $x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0$

Έχω $(1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1 - x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $(1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$

iii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow$

$e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ άρα $x \in (0,+\infty)$

29)(Άσκηση 3 σελ. 145 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Για ποιες τιμές του $x \in \Re$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, όταν :

i. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$ ii. $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$

<u>Λύση :</u>

i.Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g $\Leftrightarrow f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x > 0$

Έχω $x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 1 = 0$ αδύνατη

x	-∞	0	+∞
x	-	0	+
x^2+1	+		+
Γινόμενο	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^3+x>0 \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)$

ii.Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g $\Leftrightarrow f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^3+x-2>x^2+x-2 \Leftrightarrow x^3-x^2>0$

Έχω $x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0, ή, x=1$

x	-∞	0		1	+∞
x^2	+	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
Γινόμενο	-	0	-	0	+

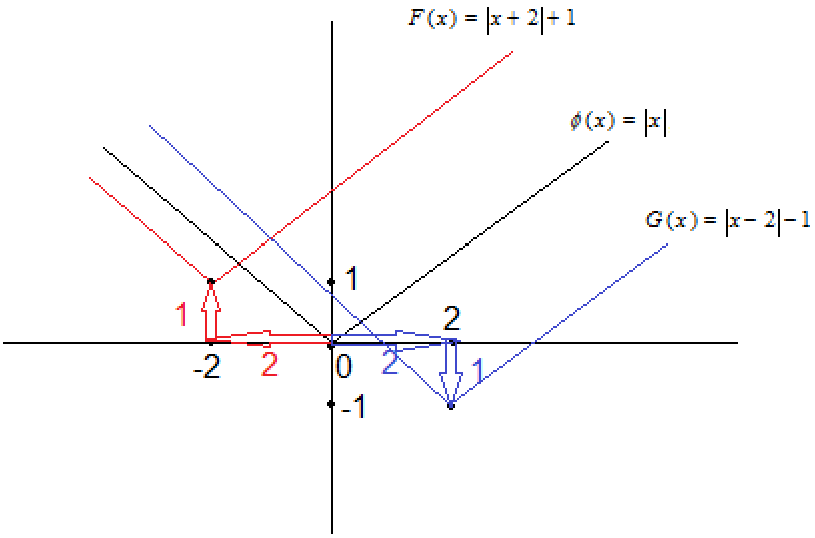
Άρα επειδή θέλω $x^3-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

30)Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$\phi(x)=|x|$, $\quad F(x)=|x+2|+1$, $\quad G(x)=|x-2|-1$

Λύση :

Οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Τονίζουμε ότι : η γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=|x+2|+1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα πάνω. Ενώ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $G(x)=|x-2|-1$ προκύπτει αν μετατοπίσουμε, όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

31) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$ να διέρχεται από τα σημεία Α(-1,3) και Β(1,7).

32) Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία Α(0,3), Β(-1,0) και Γ(-2,-1).

33) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες.

i. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3x+9}$

ii. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-1}$

iii. $f(x) = 2\eta\mu x - \sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi]$

iv. $f(x) = e^x - 1$

34) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, η C_f βρίσκεται πάνω από τον x'x.

i. $f(x) = e^{x^2-5x+6} - 1$

ii. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

iii. $f(x) = \ln\dfrac{x-1}{x+1}$

35) Να βρεθεί για ποιες τιμές του x, η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

i. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 10$ και $g(x) = x^2 + 3x + 4$

ii. $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = x - 5$

iii. $f(x) = e^{x^2-4x+8}$ και $g(x) = e^{x+2}$

36) Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και στη συνέχεια από τη γραφική παράσταση να βρείτε το σύνολο τιμών :

i. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

ii. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

iii. $f(x) = \ln(x+1) - 1$

iv. $f(x) = \ln(x-1) + 2$

v. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \le 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$

vi. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu \quad -2 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \alpha\nu \quad x > 1 \end{cases}$

vii. $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x < 0 \\ \ln(x+1) & x \ge 0 \end{cases}$

viii. $f(x)=e^{-x}+2$ και $g(x)=-\ln(x-2)$ (στο ίδιο σύστημα αξόνων) *(Θέμα Β 2019)*

ix. $f(x)=\frac{|x|}{x}+1$

x. $f(x)=x|x|$

xi. $f(x)=|\ln x|$

xii. $f(x)=\frac{|x+1|+|x-1|}{2}$

xiii. $f(x)=\frac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2}$, $x\in[0,2\pi]$.

xiv. $f(x)=\sqrt{|x-1|}$

37)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-x+2$ και η ευθεία $(\varepsilon):6x-y-4=0$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της (ε)

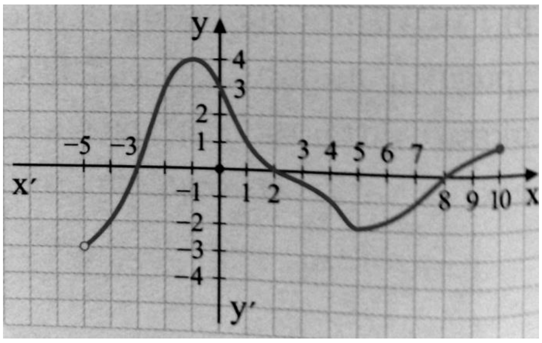
ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και (ε)

38)Έστω ότι η συνάρτηση $f(x)=\kappa\ln(x+1)+\lambda$, για την οποία ισχύει ότι η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο e^2-1 και τον άξονα y΄y στο 2.

i. Να βρείτε τα κ,λ

ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που έχει τεταγμένη 3.

39)Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$ και $f\big(f(-1)\big)$.

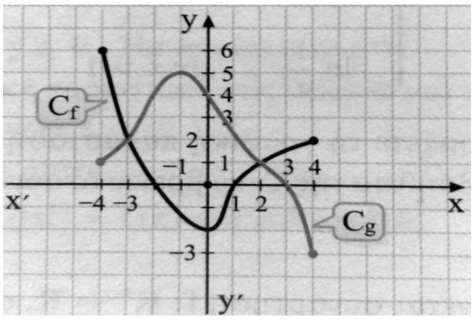
iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-2$

v. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<3$

vi. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

40) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των f, g
ii. Να βρείτε τις τιμές $f\left(g(0)\right)$ και $g\left(f(0)\right)$.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$
v. Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \le 0$

41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x + 2xe^x$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
ii. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
iii. Τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον x'x.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΕΥΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ

Έστω $f : A \to \Re$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της f :
1) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
2) Θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x, βάζοντας κατάλληλους περιορισμούς για το y.
3) Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνει το <u>σύνολο τιμών</u> της f.

Αν ένας αριθμός α ανήκει στο σύνολο τιμών της f, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :</u>

42) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση : $\pi e^x - \pi = e^x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

<u>Λύση :</u>

$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, πρέπει $e^x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow e^x \ne -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ άρα $D_f = A = \mathbb{R}$.

Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x - ye^x = y + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x(1 - y) = y + 1 \overset{\substack{\Gamma\iota\alpha \\ y\neq 1(1)}}{<===>} e^x = \dfrac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow$

(επίσης πρέπει : $\dfrac{y+1}{1-y} > 0 \Leftrightarrow (y+1)(1-y) > 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 > 0 \Leftrightarrow y \in (-1,1)$ (2))

$\Leftrightarrow \ln e^x = \ln\dfrac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{y+1}{1-y},\ y \in (-1,1)$.

Συναληθεύοντας έχω : $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ln\dfrac{y+1}{1-y} \in \mathbb{R}$ για κάθε $y \in (-1,1)$.

Τελικά από (1) και (2) ισχύει ότι πρέπει $y \in (-1,1)$, άρα $f(\mathrm{A}) = (-1,1)$

Η εξίσωση : $\pi e^x - \pi = e^x + 1$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και γράφεται ισοδύναμα : $\pi e^x - \pi = e^x + 1 \Leftrightarrow \pi\left(e^x - 1\right) = e^x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{\pi\left(e^x - 1\right)}{e^x + 1} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{\pi}$.

Επομένως $\dfrac{1}{\pi} \in f(\mathrm{A}) = (-1,1)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \pi e^x - \pi = e^x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

43) Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

ii. $f(x) = e^{x-2} + 3$

iii. $f(x) = \ln(x-2)$

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-3} + 1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2016$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει ρίζα.

46) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x - \ln\left(1 + e^x\right) = 1 - \ln\pi$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες, όταν :

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α,
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

47)(Άσκηση 7 σελ. 146 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο να ισχύει $f(x) = g(x)$.

i. $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

ii. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$ και $g(x) = 1 - \dfrac{1}{|x|}$

iii. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$

Λύση :

i. $f(x) = \sqrt{x^2}$ πρέπει $x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \Re$, άρα $D_f = \Re$

$g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ πρέπει $x \geq 0$ άρα $D_g = [0,+\infty)$. Δηλ. $D_f \neq D_g$ άρα και $f \neq g$.

Αν όμως $x \in [0,+\infty)$ τότε :

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \overset{x\geq 0}{=\!=} x$ επίσης : $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ άρα αν $x \in [0,+\infty)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

ii. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + |x|}$ πρέπει $x^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|\left(|x| + 1\right) \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

και $|x| + 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -1 \Leftrightarrow x \in \Re$. Άρα $D_f = \Re - \{0\}$

$g(x) = 1 - \dfrac{1}{|x|}$ πρέπει $|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Άρα $D_g = \Re - \{0\}$. Δηλ. $D_f = D_g$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + |x|} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + |x|} = \frac{\left(|x| - 1\right)\left(|x| + 1\right)}{|x|\left(|x| + 1\right)} = \frac{|x| - 1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x).$$

Άρα ισχύει $f(x) = g(x)$

iii. $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$ πρέπει $\begin{cases} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$

Άρα $D_f = [0,1) \cup (1,+\infty)$

$g(x) = \sqrt{x} + 1$ πρέπει $x \geq 0$ άρα $D_g = [0,+\infty)$. Δηλ. $D_f \neq D_g$ άρα και $f \neq g$.

Αν όμως $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ τότε :

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x} + 1\right)}{x - 1} = \sqrt{x} + 1 = g(x)$$

Άρα αν $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

48) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^{\frac{4}{3}}$ και $g(x)=\sqrt[3]{x^4}$.

i. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

ii. Αν $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\Re$ στο οποίο να ισχύει $f(x)=g(x)$.

iii. Να γράψετε τη συνάρτηση g στη μορφή δύναμης.

> **Προσοχή :** Για τη συνάρτηση $h(x)=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}-Z$ ισχύει ότι :
> - Αν $\alpha>0$, $A_f=[0,+\infty)$
> - Αν $\alpha<0$, $A_f=(0,+\infty)$

Λύση :

i. Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι : $x \geq 0$, δηλαδή $A_f=[0,+\infty)$.

Για τη συνάρτηση g ισχύει ότι : $x^4 \geq 0$, δηλαδή $A_g=\mathbb{R}$.

Επειδή $A_f \neq A_g$ άρα και $f \neq g$.

ii. Αν όμως $x \in \Gamma=[0,+\infty)$ τότε : $f(x)=x^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{x^4}=g(x)$.

iii. Είναι : $g(x)=\sqrt[3]{x^4}=|x|^{\frac{4}{3}}=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}} & , x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{4}{3}} & , x<0 \end{cases}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

49) Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις f , g είναι ίσες. Αν δεν είναι να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο Γ του R στο οποίο f=g.

i. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ και $g(x)=|x-1|$

ii. $f(x)=\ln x^2$ και $g(x)=2\ln x$

iii. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$ και $g(x)=|x|+2$

iv. $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$, $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ και $h(x)=e^{\frac{2}{3}\ln x}$

v. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x+4}{x-1}$

50) Να αποδειχθεί η ισότητα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sqrt{x}-2$ και $g(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

ii. $f(x)=\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ και $g(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2+2)$

51) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$f^2(x)+g^2(x)+8x^2 \leq 4x\big(f(x)+g(x)\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f=g$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για να προσδιορίσουμε την $(f \circ g)(x)$ δηλ. την $f(g(x))$

1) Βρίσκω το D_f και D_g
2) Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$
3) Για να βρω τον τύπο της $(f \circ g)(x)$ δηλ. της $f(g(x))$ πάω στην $f(x)$ και βάζω όπου x το $g(x)$. (Ομοίως ορίζεται και $g \circ f$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

52)(Άσκηση 11 σελ. 146 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση :

• $g \circ f$

$D_f = \Re$, $D_g = [2,+\infty)$

Για να ορίζεται η $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ πρέπει : $\begin{cases} x \in D_f \\ \kappa\alpha\iota \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2+1 \in [2,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2+1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \overset{*}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow D_{g \circ f} = (-\infty.-1] \cup [1,+\infty)$

* $x^2 - 1 \geq 0$, έχω $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	-∞	-1		1	+∞
x^2-1	+	0	-	0	+

Άρα $D_{g \circ f} = (-\infty.-1] \cup [1,+\infty)$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2+1-2} = \sqrt{x^2-1}$

• $f \circ g$

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [2,+\infty)$

Για να ορίζεται η $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει : $\begin{cases} x \in D_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2,+\infty) \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{x-2} \in \Re \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [2,+\infty) \\ \kappa\alpha\iota \\ x \in \Re \end{cases} \Leftrightarrow D_{f \circ g} = [2,+\infty)$ και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x-2}^{\,2} + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$

53)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

(***Θέμα Β1 2017)***

Λύση :

$f(x)=\ln x$ με $A_f=(0,+\infty)$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ με $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Για να ορίζεται η $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ πρέπει :

$\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x(1-x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\in(0,1)\end{cases}$. Δηλ. $A_{f\circ g}=(0,1)$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$ με $x\in(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

54)Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ και $g(x)=x^2-x+2$

ii. $f(x)=\sqrt{8+2x-x^2}$ και $g(x)=x^2+x-2$

55)Αν $f(x)=x^2+5$ και $g(x)=\sqrt{x-9}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

56)Αν $f(x)=\ln(x-3)$ και $g(x)=\sqrt{x}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$.

57)Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις : i. $f\circ\dfrac{1}{g}$ ii. $f\circ\dfrac{1}{f}$.

58)Να ορίσετε τη συνάρτηση $g\circ f$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$

ii. $f(x)=x^2+x+2$ και $g(x)=\sqrt{1-|x-3|}$

iii. $f(x)=\begin{cases} x-2, & αν\ \ 1\le x\le 4 \\ 5-x, & αν\ \ 4<x<8\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} x-3, & αν\ \ 0<x<3 \\ 4-x, & αν\ \ 3\le x<6\end{cases}$

59)Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $g(x)=f(x-2)+f(\ln x)$.

60)Αν $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x-3}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g\circ f$, $f\circ g$ και $f\circ f$

61)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=3x+1$ και $g(x)=x+3$. Να λυθεί $(g\circ f\circ f)(x)=(f\circ g\circ g)(x)$.

62) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+1$ και $g(x)=\alpha x+2$. Για ποια τιμή του $\alpha\in\Re$ ισχύει $fog=gof$.

63) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}$, με $\beta\neq-\alpha^2$ και $g(x)=x-2\sqrt{x}+1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(f(x))=x$, για κάθε $x\in\Re-\{\alpha\}$ και
ii. $g(g(x))=x$, για κάθε $x\in[0,1]$.

64) Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν :

i. $f(x)=\eta\mu(x^2+1)$
ii. $f(x)=2\eta\mu^2 3x+1$
iii. $f(x)=\ln(e^{2x}-1)$
iv. $f(x)=\eta\mu^2(3x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α) Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f\circ g)(x)$ και $g(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Θέτουμε $g(x)=u$
2) Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς x
3) Αντικαθιστούμε το x που βρήκαμε στον τύπο $f(g(x))$

Β) Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f\circ g)(x)$ και $f(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $g(x)$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Θέτουμε όπου x το $g(x)$ στον τύπο της $f(x)$
2) Έχουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$ με δυο μορφές (μια αυτή που βρήκαμε και μια από τα δεδομένα). Εξισώνουμε τις δυο αυτές μορφές και βρίσκουμε τη $g(x)$.

(Αν η σύνθετη συνάρτηση και η συνάρτηση που μου δίνεται ξεκινούν με διαφορετικό γράμμα, κάνω το Α, αν ξεκινούν με το ίδιο κάνω το Β)

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

65)(Άσκηση 6 σελ. 148 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i. $(f\circ g)(x)=x^2+2x+2$ και $g(x)=x+1$
ii. $(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x^2}$ και $g(x)=-x^2$
iii. $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$ και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

<u>Λύση :</u>

i. **Α)** Θέτω $g(x)=u\Leftrightarrow x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$, $x\in\mathbb{R}$, $u\in\mathbb{R}$.
$(f\circ g)(x)=x^2+2x+2\Leftrightarrow f(g(x))=x^2+2x+2\Leftrightarrow f(u)=(u-1)^2+2(u-1)+2\Leftrightarrow$
$f(u)=u^2-2u+1+2u-2+2\Leftrightarrow f(u)=u^2+1$ άρα $f(x)=x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. **Α)** Θέτω $g(x)=u\Leftrightarrow -x^2=u\Leftrightarrow x^2=-u$, με $x^2\geq 0\Leftrightarrow -u\geq 0\Leftrightarrow u\leq 0$
$(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(g(x))=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(u)=\sqrt{1-u}$ δηλαδή $f(x)=\sqrt{1-x}$, $A_f=(-\infty,0]$.

iii. **Β)** $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow \sqrt{1-f^2(x)}=|\sigma\upsilon\nu x| \Leftrightarrow 1-f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$ $f^2(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow f^2(x)=\eta\mu^2 x \Leftrightarrow |f(x)|=|\eta\mu x|,\ x\in\mathbb{R}$. Δυο τέτοιες συναρτήσεις είναι π.χ. $f(x)=\eta\mu x$ ή $f(x)=-\eta\mu x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

66) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν :
i. $(f\circ g)(x)=4x^2+6x-10$ και $g(x)=2x-1$
ii. $(f\circ g)(x)=2x-1$ και $g(x)=\dfrac{3-2x}{x+1}$
iii. $(g\circ f)(x)=3x-4$ και $g(x)=x+2$
iv. $(g\circ f)(x)=9x^2-\eta\mu x+1$ και $g(x)=3x-1$

67) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(2x-1)=4x^2-14x+12$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

68) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(5-3x)=9x^2-30x+21$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

69) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(\ln x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

70) Δίνεται συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(1-e^x)=\ln x+x$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

71) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g, αν :
i. $(f\circ g)(x)=3x^2-6x+10$ και $f(x)=3x+1$
ii. $(g\circ f)(x)=4x^2+4$ και $f(x)=2x-1$

72) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=3x-2$ και $(g\circ f)(x)=3x^2-6x+10$. Να βρείτε :
i. τη συνάρτηση f,
ii. τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

73) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=2x-3$ και $(g\circ f)(x)=2e^x(e^x+1)-15$. Να βρείτε :
i. τη συνάρτηση f,
ii. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΑΡΤΙΕΣ – ΠΕΡΙΤΤΕΣ – ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Για να δείξω ότι μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ λέγεται άρτια αν για $x \in A$ και $-x \in A$ τότε ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$. Ενώ λέγεται περιττή αν για $x \in A$ και $-x \in A$ τότε ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$. Τέλος η f λέγεται περιοδική όταν υπάρχει $T \neq 0$ με : $f(x+T) = f(x)$ και $f(x-T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$. **Προσοχή** :

- Μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y (και αντίστροφα)
- Αν η f είναι περιττή τότε η C_f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.
- Για να είναι μια συνάρτηση f άρτια ή περιττή, πρέπει οπωσδήποτε το πεδίο ορισμού να είναι σύνολο συμμετρικό ως προς το 0, δηλαδή να ισχύει $x,-x \in D_f$ για κάθε $x \in D_f$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

74)Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές :

i. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ ii. $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$

Λύση :

i. Πρέπει : $\sqrt{x^2+1}+x>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x$ (1)

1^{ος} τρόπος :

- Αν $-x>0 \Leftrightarrow x<0$, τότε :

  $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}^{\,2}>(-x)^2 \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει.
- Αν $-x<0 \Leftrightarrow x>0$, τότε η (1) προφανώς ισχύει.

Οπότε η ανισότητα (1) ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά $A_f = \mathbb{R}$

2^{ος} τρόπος :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x| \geq -x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>-x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τελικά $A_f = \mathbb{R}$.

Άρα $A_f = \mathbb{R}$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Επίσης :

$$f(-x) = \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln 1 - \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -f(x)$$

Άρα η f είναι περιττή.

ii. Πρέπει :

- $1+x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$
- $\dfrac{1-x}{1+x}>0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)>0 \Leftrightarrow 1-x^2>0 \overset{*}{\Leftrightarrow} x \in (-1,1)$

*

x	-∞	-1		1	+∞
$1-x^2$	-	0	+	0	-

Άρα επειδή θέλω $1-x^2>0$ τότε $x\in(-1,1)$

Τελικά $A_f=(-1,1)$ συμμετρικό ως προς το 0, δηλ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$. Επίσης :

$f(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$. Άρα η f είναι περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

75)Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές :

i. $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ii. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ iii. $f(x)=x^2+x\eta\mu x$

iv. $f(x)=x^4+3x^2+1$ v. $f(x)=x^4+3x^2+1$ όταν $x\in[-1,+\infty)$

vi. $f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$ vii. $f(x)=x\eta\mu\frac{1}{x}$

76)Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\frac{\alpha-x}{x+3}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο Α(-5,-4).

i. Να βρείτε τον αριθμό α.
ii. Να ορίσετε τη $(f\circ g)(x)$.
iii. Να αποδείξετε ότι η $(f\circ g)(x)$ είναι περιττή.

77)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.
ii. Η f είναι περιττή.
iii. Η C_f έχει με τον x'x μόνο ένα κοινό σημείο.

78)Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνθέσιμες συναρτήσεις τότε :

i. Να δείξετε ότι αν η g είναι άρτια, τότε και η $f\circ g$ είναι άρτια.
ii. Να δείξετε ότι αν οι f, g είναι περιττές, τότε και η $f\circ g$ είναι περιττή.
iii. Να δείξετε ότι αν η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, τότε και η $f\circ g$ είναι άρτια.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 10 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σε κάποιες ασκήσεις δεν μας δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, αλλά κάποια σχέση ή γενική ιδιότητα που έχουν οι τιμές της. Π.χ $f(x+y)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x\in\Re$. Επειδή η σχέση ισχύει για κάθε τιμή των x,y, συνήθως επιλέγουμε κατάλληλες τιμές που μας βολεύουν όπως : x=y=0, ή x=y=1 ή x=y ή x=0 ή y=-x κλπ.

- Αν προκύψει σχέση της μορφής $f(x)\cdot g(x)=0$ είναι λάθος να συμπεράνω ότι : $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in\Re$.

  Για παράδειγμα έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x-|x|$, $x\in\Re$ και $g(x)=x+|x|$, $x\in\Re$.

  Έχουμε λοιπόν ότι : $f(x)\cdot g(x)=\left(x-|x|\right)\cdot\left(x+|x|\right)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$.
- Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f που να ικανοποιεί κάποια ιδιότητα, υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση και με κατάλληλη επιλογή τιμών για τις μεταβλητές οδηγούμε σε άτοπο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

79)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $3f(x+1)-2f(2-x)=x^2+14x-5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Λύση :

$3f(x+1)-2f(2-x)=x^2+14x-5$ (1)

Στην (1) έστω $x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$ και έχω

$3f(y-1+1)-2f[2-(y-1)]=(y-1)^2+14(y-1)-5 \Leftrightarrow$

$3f(y)-2f(2-y+1)=y^2-2y+1+14y-14-5 \Leftrightarrow 3f(y)-2f(3-y)=y^2+12y-18$ ή

$\boxed{3f(x)-2f(3-x)=x^2+12x-18}$ (2)

Επίσης στην (1) έστω $2-x=y \Leftrightarrow x=2-y$ και έχω :

$3f(2-y+1)-2f[2-(2-y)]=(2-y)^2+14(2-y)-5 \Leftrightarrow 3f(3-y)-2f(y)=4-4y+y^2+28-14y-5 \Leftrightarrow$

$3f(3-y)-2f(y)=y^2-18y+27$ ή $\boxed{3f(3-x)-2f(x)=x^2-18x+27}$ (3).

Τις (2) και (3) τις κάνω σύστημα και έχω :

$$\begin{cases}3f(x)-2f(3-x)=x^2+12x-18\cdot(3)\\ -2f(x)+3f(3-x)=x^2-18x+27\cdot(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9f(x)-6f(3-x)=3x^2+36x-54\\ -4f(x)+6f(3-x)=2x^2-36x+54\end{cases}$$ προσθέτω

κατά μέλη και έχω : $5f(x)=5x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

80)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(x^2+6)+f(5x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

Λύση :

[Είναι $x^2+6=5x \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=3$]

Η σχέση $f(x^2+6)+f(5x)=0$ (1) για :

- $x=2$ γίνεται $f(4+6)+f(10)=0 \Leftrightarrow 2f(10)=0 \Leftrightarrow f(10)=0$, άρα η $x=10$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

- $x=3$ γίνεται $f(9+6)+f(15)=0 \Leftrightarrow 2f(15)=0 \Leftrightarrow f(15)=0$, άρα η $x=15$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

81)Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f\big(f(x)\big)=2x-1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(2x-1)=2f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Λύση :

Στη σχέση (1), θέτω όπου x το $f(x)$ και έχω :

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)=2f(x)-1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2x-1)=2f(x)-1,\ x\in\mathbb{R}.$$

ΣΥΧΝΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

82)Μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ (1) για κάθε $x,y>0$. Να δείξετε ότι :

i. $f(1)=0$

ii. $f(y)=-f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ για κάθε $y>0$.

iii. $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y>0$.

Λύση :

i. Στη σχέση (1), θέτω $x=y=1$ και έχουμε : $f(1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$

ii. Στη σχέση (1), θέτω $x=\dfrac{1}{y}$ και έχουμε :

$$f\left(\frac{1}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y) \Leftrightarrow f(1)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y) \Leftrightarrow f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$$

iii. Έχουμε : $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\dfrac{1}{y}\right)\overset{(1)}{=}f(x)+f\left(\dfrac{1}{y}\right)\overset{ii.}{=}f(x)-f(y)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

83)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(x-2)+2f(3-x)=11-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι $f(x)+2f(1-x)=7-2x$

ii. Να αποδειχθεί ότι $f(1-x)+2f(x)=5+2x$

iii. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

84)Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2)+f(2x)=x^4-8x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες.

85)Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2+2)+f(3x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε δυο τουλάχιστον σημεία.

86)Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\big(f(x)\big)=2x-1$, (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(2x-1)=2f(x)-1$, $x\in\mathbb{R}$.
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

87)Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\big(f(x)\big)=3x-2$, (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f(3x-2)=3f(x)-2$, $x\in\mathbb{R}$.
ii. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την ευθεία y=1 σε ένα τουλάχιστον σημείο.

88)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

i. $f(0)=0$. ii. Η f είναι περιττή iii. $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

89)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $f(x)+x\le x^2\le f(x+1)-x$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)\ge x^2-x$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f.
iii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.
iv. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

90)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $x^3\big[f(x)+f(-x)+6\big]=3f(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και στη συνεχεία να βρείτε τον τύπο της.

91)Έστω μια συνάρτηση : $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)-2=\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι $f(1)=1$.
ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x)<\ln x+2$.

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση : **(2007 ΟΜΟΓ., 2007 ΕΣΠ., 2010 ΕΣΠ.,)**

- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$
- Η συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα δ ι ά σ τ η μ α Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Αν μια συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η *f* είναι **γνησίως μονότονη στο Δ.** Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της *f* είναι ένα διάστημα *Δ* και η *f* είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η *f* είναι γνησίως μονότονη.

- ***αύξουσα*** *σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε* $x_1,x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) \le f(x_2)$.
- ***φθίνουσα*** *σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε* $x_1,x_2 \in \Delta$ *με* $x_1 < x_2$ *ισχύει* $f(x_1) \ge f(x_2)$.

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση : **(2004 ΟΜΟΓ., 2010 Β΄, 2014 ΕΣΠ.)**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Κάποιες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης *f* λέγονται (ολικά) **ακρότατα** της *f*.

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση : **(2003 ΟΜΟΓ., 2005 Β΄, 2012 ΟΜΟΓ., 2015 Β΄)**

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f(x_1) \ne f(x_2)$.

Σχόλια :

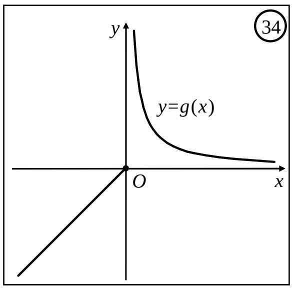
α) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι συνάρτηση $\mathbf{1-1}$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:
- **Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.**
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο**.

- **Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση** "$1-1$"**. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.** Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα (Πανελλήνιες 2018)

Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x\le 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$ (Σχ. 34).είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



<u>Παρατηρήσεις :</u>

- Αν γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε : $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$. Την ισοδυναμία αυτή τη χρησιμοποιούμε για επίλυση εξισώσεων. Επίσης ισχύει : $f(x_1)\neq f(x_2)\Leftrightarrow x_1\neq x_2$.
- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι 1-1 αρκεί : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.
- Αν η f δεν είναι 1-1, τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ τ.ω. $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$.
- $\mu o \nu o \tau o \nu \acute{\iota} \alpha \Rightarrow 1-1$ όμως $1-1 \not\Rightarrow \mu o \nu o \tau o \nu \acute{\iota} \alpha$
- $\acute{o}\chi\iota\ \mu o \nu o \tau o \nu \acute{\iota} \alpha \not\Rightarrow \acute{o}\chi\iota\ 1-1$ όμως $\acute{o}\chi\iota\ 1-1 \Rightarrow \acute{o}\chi\iota\ \mu o \nu o \tau o \nu \acute{\iota} \alpha$

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ; (2019)

<u>Απάντηση :</u>

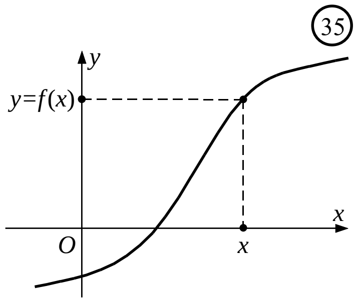
Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση : $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

Αντίστροφη συνάρτηση

- Έστω μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών, $f(\mathrm{A})$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο *x* του πεδίου ορισμού της Α για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$f^{-1}:f(\mathrm{A})\to\mathbb{R}$$

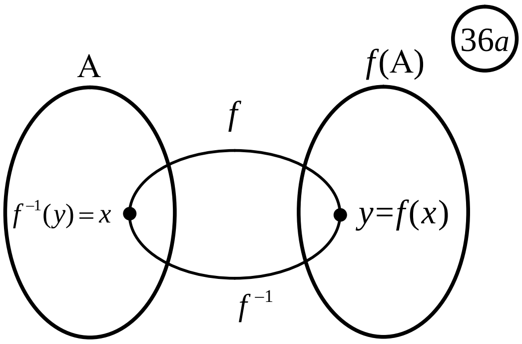
με την οποία κάθε $y\in f(\mathrm{A})$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in\mathrm{A}$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.



Από τον τρόπο που ορίστηκε η f^{-1} προκύπτει ότι :

– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(\mathrm{A})$ της *f*,
– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού *A* της *f* και
– ισχύει η ισοδυναμία : $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το *x* στο *y*, τότε η f^{-1} αντιστοιχίζει το *y* στο *x* και αντιστρόφως. Δηλαδή η f^{-1} είναι η αντίστροφη διαδικασία της *f*. Για το λόγο αυτό η f^{-1} λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε : $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.



Σχόλια :

α) Ισχύει ότι : $f^{-1}(f(x))=x,\ \ x\in A$ και $f(f^{-1}(y))=y,\ \ y\in f(A)$.

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f, και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f.

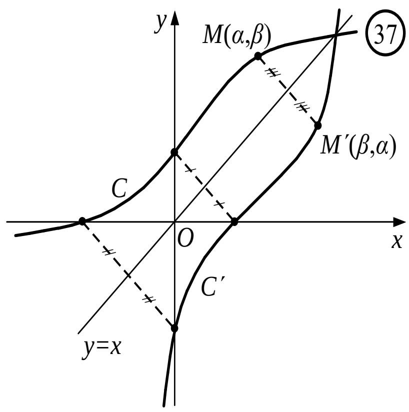
Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της *f*. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,
– έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$
– έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και
– αντιστοιχίζει κάθε $y\in(0,+\infty)$ στο μοναδικό $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $e^x=y$. Επειδή όμως $e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$

θα είναι $f^{-1}(y)=\ln y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $f^{-1}(y)=\ln y$.

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Απόδειξη :

Ας πάρουμε μια $1-1$ συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις *C* και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ.37). Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση *C* της f , τότε το σημείο $\mathrm{M}'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



Παρατηρήσεις :

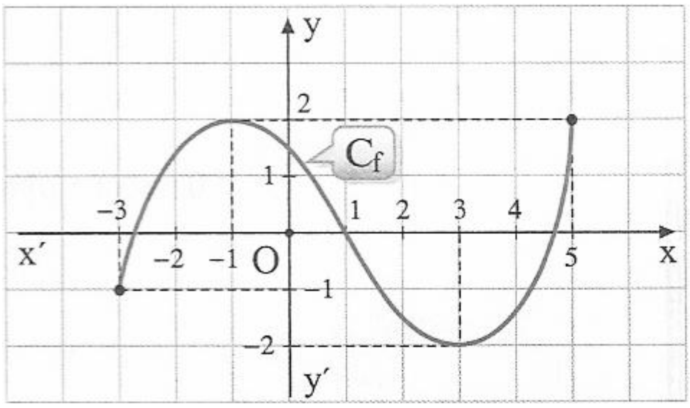
- $f:1-1 \Leftrightarrow f: \alpha\nu\tau\iota\sigma\tau\rho\acute{\varepsilon}\psi\iota\mu\eta$,
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
- Αν f γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας : π.χ. αν $f \uparrow \sigma\tau o\ \mathrm{A}$ τότε έστω $y_1, y_2 \in D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A})$ με $y_1 < y_2$, τότε :

  $f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2)) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ άρα $f^{-1}\uparrow$ στο $D_{f^{-1}} = f(\mathrm{A})$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Α : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΑΠΟ ΣΧΗΜΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Λύση :
Όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-3,-1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,5]$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1Β : ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑΣ ΜΕ ΟΡΙΣΜΟ

Για να βρούμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.
- Με κατάλληλες πράξεις κατασκευάζουμε την ανισότητα μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
- Αν καταλήξουμε στην ανισότητα $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Χρήσιμες είναι οι παρακάτω **ιδιότητες της διάταξης** :

i. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$

ii. Αν $\gamma > 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$

iii. Αν $\gamma < 0$ τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

iv. Αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε προσθέτω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να προσθέσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

v. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί αριθμοί τότε αν $\alpha > \beta$ (1) και $\gamma > \delta$ (2), τότε πολλαπλασιάζω κατά μέλη της (1) και (2) και έχω : $\alpha\gamma > \beta\delta$ (Προσοχή : δεν γίνεται να πολλαπλασιάσω κατά μέλη ανισότητες που έχουν διαφορετική φορά.)

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί και ν φυσικός διαφορετικός του μηδέν, τότε ισχύει :

vi. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$

(Προσοχή : αν α, β αρνητικοί τότε : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^\nu < \beta^\nu, \alpha\nu\_\nu\_\pi\varepsilon\rho\rho\iota\tau\acute{o}\varsigma \\ \alpha^\nu > \beta^\nu, \alpha\nu\_\nu\_\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$)

vii. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$

viii. Αν οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

2) Να βρείτε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων :
i. $f(x) = 4x - 7$ ii. $f(x) = -4x - 7$

Λύση :

i. $f(x) = 4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 7 < 4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = \mathbb{R}$

ii. $f(x) = -4x - 7$, Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το x άρα $D_f = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -4x_1 > -4x_2 \Rightarrow -4x_1 - 7 > -4x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \Re$

(**Γενικά** γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία. Για τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής ισχύει ότι :

- Αν $\alpha > 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha < 0$ η $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha = 0$ η $f(x) = 0x + \beta \Leftrightarrow f(x) = \beta$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$)

3) (Άσκηση 1 σελ. 156 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)
Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες;
 i. $f(x) = \sqrt{1-x}$
 ii. $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$
 iii. $f(x) = 3e^{1-x} + 1$
 iv. $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \le 1$.

Λύση :

i. Πρέπει : $1 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1$. Άρα $D_f = (-\infty,1]$
Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty,1]$, με
$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty,1]$.

ii. Πρέπει : $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Άρα $D_f = (2,+\infty)$
Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (2,+\infty)$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Rightarrow$
$2\ln(x_1 - 2) < 2\ln(x_2 - 2) \Rightarrow 2\ln(x_1 - 2) - 1 < 2\ln(x_2 - 2) - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $D_f = (2,+\infty)$.

iii. $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με
$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Rightarrow 3e^{1-x_1} > 3e^{1-x_2} \Rightarrow$
$3e^{1-x_1} + 1 > 3e^{1-x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \Re$.

iv. $D_f = (-\infty,1]$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = (-\infty,1]$, με
$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \overset{\text{Επειδή}, x \le 1}{\underset{x_1 - 1 \le 0, \& \; x_2 - 1 \le 0}{=\!=\!=\!=\!>}} (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow$ (Όταν υψώνω στο τετράγωνο αρνητικούς αριθμούς, αλλάζει η φορά της ανίσωσης)
$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_f = (-\infty,1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις :
 i. $f(x) = 6 - 2x$
 ii. $f(x) = 2x^3 - 1$
 iii. $f(x) = \sqrt{6-2x} + 3$
 iv. $f(x) = x^2 + \sqrt{x-1}$

v. $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{3-x}}$

vi. $f(x)=e^x+x^3+1$

vii. $f(x)=\frac{2}{x}-\ln(x-5)$

viii. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-4x^3+2016$

ix. $f(x)=\frac{3}{x}-6x^4-\sqrt{x}$

x. $f(x)=x^3-\sqrt{2-x}+5x$

xi. $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+2}$

xii. $f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}$

xiii. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

xiv. $f(x)=\frac{1}{x^2}$

5) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-3x+\frac{1}{x}$ στο διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$ ii. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, στο $(-\infty,1)$.

6) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση : $f(x)=(\lambda^2-2\lambda-15)x-2018$ είναι γνησίως φθίνουσα και η συνάρτηση $g(x)=(|2\lambda-1|-|\lambda+2|)x+2019$ είναι γνησίως αύξουσα.

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν οι f,g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση f+g είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Αν οι f,g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η συνάρτηση f+g είναι γνησίως φθίνουσα.

8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση f-g είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε και η συνάρτηση g-f είναι γνησίως φθίνουσα.

9) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

10) Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

i. Αν f,g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Αν f,g είναι γνησίως φθίνουσες, τότε και η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσες.

11) Έστω δυο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα , να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=f(-2x+3)$.

12) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=2x+3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2-\sqrt{x}+\dfrac{\alpha+6}{x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,-33)$ να δείξετε ότι $\alpha=-2$.
iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

14) Δίνεται περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty,0)$.

15) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}x^2 &, \alpha\nu\ \ x\geq 0\\ x+1, & \alpha\nu\ \ x<0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}e^x-x^2 &, \alpha\nu\ \ x\leq -1\\ 3-\ln(x+1), & \alpha\nu\ \ x>-1\end{cases}$ iii. $f(x)=\begin{cases}x+1 &, \alpha\nu\ \ x\leq 1\\ x^2-2x+3, & \alpha\nu\ \ x>1\end{cases}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ μια φορά. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha\in\Re$, έχει το πολύ μια ρίζα.

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η εξίσωση έχει τη μορφή $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
3) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$
4) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έχει το πολύ μια ρίζα που είναι η προφανής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

16) Να λυθεί η εξίσωση : $\sqrt{10-x}=3+\ln x$.

Λύση : Έχω : $\sqrt{10-x}-3-\ln x=0$, έστω $f(x)=\sqrt{10-x}-3-\ln x$. Πρέπει $\begin{cases}10-x\geq 0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x\leq 10\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,10]$, δηλ. $D_f=(0,10]$. Έχω να λύσω την εξίσωση $\sqrt{10-x}-3-\ln x=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Με δοκιμές παρατηρώ ότι για $x=1$ έχω :

$\sqrt{10-1}-3-\ln 1=0 \Leftrightarrow 3-3=0 \Leftrightarrow f(1)=0$. Άρα η $x=1$ είναι ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$. Για να δείξω ότι είναι και μοναδική, αρκεί να δείξω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x_1,x_2 \in D_f=(0,10]$, με $x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 10-x_1>10-x_2 \Rightarrow \sqrt{10-x_1}>\sqrt{10-x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2 \Rightarrow -3-\ln x_1>-3-\ln x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $\sqrt{10-x_1}-3-\ln x_1>\sqrt{10-x_2}-3-\ln x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και η ρίζα $x=1$ της εξίσωσης $f(x)=0$ είναι και μοναδική.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

17) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^3=1-\ln x$ ii. $e^x+x=1$ iii. $\ln x=\dfrac{1}{x}-1$ iv. $2\sqrt{x-1}=1+\dfrac{8}{x^3}$

v. $x+\ln x=1$ vi. $x^2+\ln x-1=0$ vii. $1-e^x=x+\eta\mu x$ στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

18) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(6,1)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha=-6$.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-2}=\dfrac{6}{x}-1$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{8}{x^3}-3\sqrt{x-1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $8+2x^3=3x^3\sqrt{x-1}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ & ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση η οποία δεν λύνεται με κάποια γνωστή μέθοδο δουλεύουμε ως εξής :

1) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος
2) θέτουμε το 1ο μέλος ως συνάρτηση $f(x)$ οπότε η ανίσωση έχει τη μορφή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$
3) αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
4) βρίσκουμε με δοκιμές μια ρίζα (προφανής) της εξίσωσης $f(x)=0$ ή $f(x)=\alpha$ έτσι η ανίσωση γίνεται $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(\rho)$
5) εκμεταλλευόμαστε τη μονοτονία της f για να λύσουμε την ανίσωση που προέκυψε.

ΠΡΟΣΟΧΗ :

- Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε : $\alpha<\beta \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\beta)$ και $\alpha\le\beta \Leftrightarrow f(\alpha)\le f(\beta)$
- Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα τότε : $\alpha<\beta \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)$ και $\alpha\le\beta \Leftrightarrow f(\alpha)\ge f(\beta)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

20)Να λυθεί η ανίσωση : $x^3+x<2-\ln x$.

Λύση : Έχω : $x^3+x+\ln x-2<0$ η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Έστω $h(x)=x^3+x+\ln x-2$, με $A_h=(0,+\infty)$, έχω να λύσω την ανίσωση : $h(x)<0$ (1)

Παρατηρώ ότι $h(1)=0$ άρα η $x=1$ άρα η ανίσωση (1) γίνεται : $h(x)<h(1)$.

Αρκεί τώρα να βρω τη μονοτονία της h :

Έστω $x_1,x_2\in A_h$ με :

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$ (2)

$x_1<x_2$ (3)

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow \ln x_1-2<\ln x_2-2$ (4)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2),(3) και (4) και έχω :

$x_1^3+x_1+\ln x_1-2<x_2^3+x_2+\ln x_2-2 \Rightarrow h(x_1)<h(x_2)$

Άρα η $h\uparrow$ για κάθε $x\in A_h=(0,+\infty)$, οπότε $h(x)<h(1)\Leftrightarrow x<1$ ή $x\in(0,1)$.

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)$

Λύση : Έχω : $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2 \Rightarrow 3x_1<3x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1}+3x_1<e^{x_2}+3x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε $f(2x^2-x+3)<f(3x+x^2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}2x^2-x+3<3x+x^2 \Leftrightarrow x^2-4x+3<0$.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω $x^2-4x+3<0 \Leftrightarrow x\in(1,3)$.

22)Αν η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η ανίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)>\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$.

Λύση :

Πρέπει : $x^4+1\neq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η δοσμένη ανίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι : $2\left(x^2-3x+2\right)>\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow 2x^2-6x+4>\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+\ln\left(x^4+1\right)>6x-4+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow 2x^2+\ln\left(x^4+1\right)>2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2)>f(3x-2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x^2>3x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

23)Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,6)$ και $\mathrm{B}(2,3)$.

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3$.

Λύση :

i. Η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,6)$, άρα ισχύει $f(-1)=6$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(2,3)$, άρα ισχύει $f(2)=3$. Αν $x_1=-1$ και $x_2=2$ τότε $-1<2\Rightarrow x_1<x_2$. Επίσης $f(-1)=6\Leftrightarrow f(x_1)=6$ και $f(2)=3\Leftrightarrow f(x_2)=3$.

Έχουμε δηλ. $x_1<x_2$ με $f(x_1)>f(x_2)$, επομένως η f αποκλείεται να είναι γνησίως αύξουσα και επειδή είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. $f\left(f(x^2-17)-4\right)<3\overset{f(2)=3}{\Leftrightarrow}f\left(f(x^2-17)-4\right)<f(2)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x^2-17)-4>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x^2-17)>6\overset{f(-1)=6}{\Leftrightarrow}f(x^2-17)>f(-1)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x^2-17<-1\Leftrightarrow x^2-16<0\Leftrightarrow x\in(-4,4)$.

24)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x-1$

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.
iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων : $g(x)=\ln f(x)$ και $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
iv. Να δείξετε ότι $xf(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.
v. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(x+5)>f(x+3)+f(x+7)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
vi. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(7x)>f(3x)+f(10x)$ για κάθε $x>0$.
vii. Να δείξετε ότι : $f(x)>f(x^2)$ για κάθε $x>1$.
viii. Να δείξετε ότι : $f(x^3)>f(x^2)$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Λύση :

i. $\mathrm{A}_f=\mathbb{R}$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{-x_1}-x_1-1>e^{-x_2}-x_2-1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}_f=\mathbb{R}$.

ii. Ρίζες : $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}-x-1=0$. Παρατηρούμε ότι : $f(0)=e^{0}-0-1=0$, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης : $f(x)=0$ και επειδή η $f \downarrow \mathbb{R}$, είναι και μοναδική.
Πρόσημο :

- $x>0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$
- $x<0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

iii. Για τη $g(x)=\ln f(x)$ πρέπει : $x\in \mathrm{A}_f=\mathbb{R}$ και $f(x)>0 \overset{ii.}{\Leftrightarrow} x<0$, άρα $\mathrm{A}_g=(-\infty,0)$.
Για την $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ πρέπει : $x\in \mathrm{A}_f=\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0 \overset{ii.}{\Leftrightarrow} x\neq 0$, άρα $\mathrm{A}_h=\mathbb{R}^*$.

iv. Αν $x>0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} xf(x)<0$
Αν $x<0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} xf(x)<0$
Άρα σε κάθε περίπτωση : $xf(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.

v. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι :

- $x<x+3 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x+3)$ (1)
- $x+5<x+7 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x+5)>f(x+7)$ (1)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε : $f(x)+f(x+5)>f(x+3)+f(x+7)$.

vi. Για κάθε $x>0$ έχουμε :
$1<3 \Leftrightarrow x<3x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(3x)$ (3)
$7<10 \Leftrightarrow 7x<10x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(7x)>f(10x)$ (4)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4) έχουμε : $f(x)+f(7x)>f(3x)+f(10x)$ για κάθε $x>0$.

vii. Για κάθε $x>1$, έχουμε : $x>1 \overset{\cdot x}{\Leftrightarrow} x^2>x \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)<f(x) \Leftrightarrow f(x)>f(x^2)$

viii. Για κάθε $x\in(0,1)$, έχουμε : $x^2>x^3 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x^2)<f(x^3) \Leftrightarrow f(x^3)>f(x^2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

25)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να δείξετε ότι αν $x>e$, τότε $\ln x-\dfrac{1}{x}+x>1-\dfrac{1}{e}+e$
iii. Να δείξετε ότι αν $x>1$, τότε $x\ln x+x^2>1$
iv. Να δείξετε ότι αν $\alpha,\beta>0$ και $\alpha<\beta$, τότε $\ln\dfrac{\alpha}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}+\beta-\alpha$

v. Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$, $xe^{x-\frac{1}{x}} \geq 1$
vi. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1$
vii. Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - x - 6 > \ln\frac{x+7}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x+7}$.

26)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln x + e^x - 1$
i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να δείξετε ότι αν $x > 1$, τότε $e^x + \ln x > e$
iii. Να δείξετε ότι αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln\frac{\alpha}{\beta} < e^{\beta} - e^{\alpha}$
iv. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$
v. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$
vi. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$, $f(x) < f(x^2)$

27)Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2008) < f(2004)$.
i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(5-3x) \leq f(x^2+x)$.

28)Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(2007) < f(2000)$.
i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(3x-2) \geq f(x^2)$.

29)Να λυθούν οι ανισώσεις :
i. $9 - x^3 < e^{x-2}$ ii. $e^{x-1} + x < 2$ iii. $1 + \ln x < \frac{1}{x}$

30)Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,5) και Β(-2,7).
i. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να λυθεί η ανίσωση $f\left(f\left(|x|-4\right)-6\right)-5 < 0$.

31)Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $g(x) = f(2x-5) - f(4-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
i. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία
ii. Να λύσετε την ανίσωση : $g(e^x - 2) > 0$

32)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{4}{x} - \sqrt{x}$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x^2}{\sqrt{x}} - x < 4$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{4}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2x+5} < \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x+5}$.

33)Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(\alpha^2+1) \leq f(2\alpha)$.

34)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{x}+x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\sqrt{|x|+5}-\sqrt{3|x|+1}<2|x|-4$.

35)Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{x^2+5}-\frac{1}{2x^2+1}<\ln\frac{x^2+5}{2x^2+1}$

36)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=-2x^3-3x+5$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε τις ανισώσεις : α) $f(x-4)<f(3x)$ β) $f(|x|)>0$ γ) $f(x^2-5)-f(3-2x)>0$.

37)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=8e^{2-x}-2x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<4$

iii. Να λύσετε την ανίσωση : $8\left(e^{2-x^2}-e^{2-x}\right)>-2x(1-x)$

38) Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα y΄y στο 2. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2-1\right)<2$.

i. αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

39)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=3x^{2019}+2x^{2017}+1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(x)\right)<6$.

iii. Να αποδείξετε ότι : $f(13)-f(12)<f(14)-f(11)$.

40)Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

i. $f(x)+f(5x)<f(3x)+f(6x)$, για κάθε $x>0$.

ii. $f(x)+f(x^3)>f(x^2)+f(x^5)$, για κάθε $x\in(0,1)$.

41)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x+1}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{M}(-2,5)$ και $\mathrm{N}(-4,3)$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=2$, $\beta=-1$.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

iii. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f παίρνει τη μορφή $f(x)=2-\frac{3}{x+1}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$.

v. Να αποδείξετε ότι : $f(3)-f(2)<f(4)-f(1)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

42) Δίνεται η συνάρτηση : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+e^{f(x)}+x-1=0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση :

1ος τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x)=x^3+e^x$, $x\in\mathbb{R}$

άρα η (1) γίνεται : $g\big(f(x)\big)=1-x \Leftrightarrow (g\circ f)(x)=1-x$, (2) $x\in\mathbb{R}$

Επίσης η $g(x)=x^3+e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ καθώς :

για κάθε $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$

$x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχω $x_1^3+e^{x_1}<x_2^3+e^{x_2} \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Άρα τελικά : για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ είναι :

$$x_1<x_2 \Rightarrow 1-x_1>1-x_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} (g\circ f)(x_1)>(g\circ f)(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big)>g\big(f(x_2)\big) \overset{g:\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος :

Αρχικά η (1) γίνεται : $f^3(x)+e^{f(x)}=1-x$

Για να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$.

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και ισχύει ότι $f(x_1)\le f(x_2)$ τότε :

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1)\le f^3(x_2)$ (2)

$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)}\le e^{f(x_2)}$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω :

$f^3(x_1)+e^{f(x_1)}\le f^3(x_2)+e^{f(x_2)} \overset{(1)}{\Rightarrow} 1-x_1\le 1-x_2 \Rightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο καθώς $x_1<x_2$.

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\Re$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

43) Δίνεται η συνάρτηση : $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)-x+2016=0$ (1) για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

44) Δίνεται η συνάρτηση : $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^{2017}(x)+3f(x)-e^{-x}=1$ (1) για κάθε $x\in\Re$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Α : ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Γενικά για να αποδείξω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο, προσπαθούμε να βρούμε ένα $x_0 \in \mathrm{A}$ τέτοιο ώστε : $f(x) \leq f(x_0)$, αντίστοιχα ελάχιστο $f(x) \geq f(x_0)$.

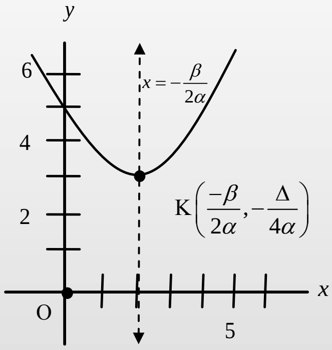
Για να βρω τα ακρότατα μιας συνάρτησης, είναι χρήσιμες οι παρακάτω διαδικασίες :

- Ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

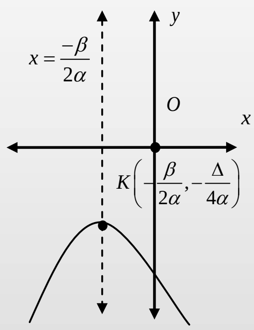
  Η γραφική παράσταση της f είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο $\mathrm{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

  - Αν $\alpha > 0$ τότε : $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **ελάχιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
  - Αν $\alpha < 0$ τότε : $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και παρουσιάζει **μέγιστο** στο $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ το $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

Αν $\alpha > 0$



Αν $\alpha < 0$



- Αν γνωρίζουμε τη μονοτονία μιας συνάρτησης σε κλειστό διάστημα τότε μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα της π.χ
  - αν $f \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α ελάχιστο το $f(\alpha)$ και στο β μέγιστο το $f(\beta)$
  - αν $f \downarrow [\alpha, \beta]$ τότε παρουσιάζει στο α μέγιστο το $f(\alpha)$ και στο β ελάχιστο το $f(\beta)$

- Κατασκευάζω ανισοισότητες της μορφής $f(x) \geq m$ ή $f(x) \leq \mathrm{M}$ ή $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ και βρίσκω τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει το ¨=¨ λύνοντας την εξίσωση : $f(x) = m$ ή $f(x) = \mathrm{M}$

  (Προσοχή : Χρήσιμες είναι οι ανισώσεις
  - $x^{2\nu} \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 0$
  - $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \Re$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 0$
  - $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x > 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 1$
  - $x + \frac{1}{x} \leq -2$ για κάθε $x < 0$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = -1$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

45)Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^2-4x+7$

ii. $f(x)=-x^2+2x+3$

iii. $f(x)=5-4|x-1|$

iv. $f(x)=-\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}$

v. $f(x)=x^2-2|x|+3$

vi. $f(x)=2\ln x+3$, $x\in[1,e]$

vii. $f(x)=2\ln(x-3)-5$

viii. $f(x)=\sqrt{4-2x}$

ix. $f(x)=3-5x$, $x\in[-2,5)$

Λύση :

i. $f(x)=x^2-4x+7$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha=1>0$ άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{-4}{2}=2$ το $f(x_0)=f(2)=3$, άρα για κάθε $x\in\Re$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(2)\Leftrightarrow f(x)\geq 3$.

Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

ii. $f(x)=-x^2+2x+3$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha=-1<0$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{2}{2\cdot(-1)}=1$ το $f(x_0)=f(1)=4$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(1)\Leftrightarrow f(x)\leq 4$.

iii. $f(x)=5-4|x-1|$, είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $|x-1|\geq 0\Leftrightarrow -4|x-1|\leq 0\Leftrightarrow 5-4|x-1|\leq 5\Leftrightarrow f(x)\leq 5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=5\Leftrightarrow 5-4|x-1|=5\Leftrightarrow -4|x-1|=0\Leftrightarrow x=1$, δηλ. $f(1)=5$ άρα η (1) γίνεται $f(x)\leq 5\Leftrightarrow f(x)\leq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=5$.

iv. $f(x)=-\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}$, πρέπει

- $4-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$
- $2+\sqrt{4-x}\neq 0$, που ισχύει άρα,

είναι $A_f=(-\infty,4]$. Έχουμε για κάθε $x\in(-\infty,4]$ έχουμε $\sqrt{4-x}\geq 0\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-x}\geq 2\Leftrightarrow \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}\geq -\dfrac{10}{2}\Leftrightarrow f(x)\geq -5$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=-5\Leftrightarrow -\dfrac{10}{2+\sqrt{4-x}}=-5\Leftrightarrow 2+\sqrt{4-x}=2\Leftrightarrow x=4$, δηλ. $f(4)=-5$ άρα η (1) γίνεται $f(x)\geq -5\Leftrightarrow f(x)\geq f(4)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=4$ το $f(4)=-5$.

v. $f(x)=x^2-2|x|+3$, είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι : $f(x)=x^2-2|x|+3 \Leftrightarrow f(x)=x^2-2|x|+1+2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)=|x|^2-2|x|+1+2 \Leftrightarrow f(x)=(|x|-1)^2+2$. Έχουμε για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $(|x|-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+2\geq 2 \Leftrightarrow f(x)\geq 2$ (1)

Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2+2=2 \Leftrightarrow (|x|-1)^2=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, δηλ. $f(1)=2$ και $f(-1)=2$ άρα η (1) γίνεται : $f(x)\geq 2 \Leftrightarrow \left(f(x)\geq f(1)\ \kappa\alpha\iota\ f(x)\geq f(-1)\right)$.

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1=-1$ και στο $x_2=1$ το $f(-1)=f(1)=2$.

vi. $f(x)=2\ln x+3$, είναι $A_f=[1,e]$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\uparrow[1,e]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_1=1$ το $f(1)=2\ln 1+3=3$ δηλ. για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 3$.
- Μέγιστο στο $x_2=e$ το $f(e)=2\ln e+3=5$ δηλ. για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(\mathrm{e}) \Leftrightarrow f(x)\leq 5$.

vii. $f(x)=2\ln(x-3)-5$, είναι $A_f=(3,+\infty)$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\uparrow(3,+\infty)$ άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

viii. $f(x)=\sqrt{4-2x}$, είναι $A_f=(-\infty,2]$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\downarrow(-\infty,2]$ άρα η f παρουσιάζει :

- ελάχιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=\sqrt{4-2\cdot 2}=0$ δηλ. για κάθε $x\in(-\infty,2]$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(2) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$. Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο.

ix. $f(x)=3-5x$, είναι $A_f=[-2,5)$.

Με ¨χτίσιμο¨ δείχνω ότι $f\downarrow[-2,5)$ άρα η f παρουσιάζει :

- Μέγιστο στο $x_0=-2$ το $f(-2)=3-5\cdot(-2)=13$ δηλ. για κάθε $x\in[-2,5)$ ισχύει ότι $f(x)\leq f(-2) \Leftrightarrow f(x)\leq 13$. Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

46) Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=x^2-5x+6$

ii. $f(x)=x^2+2x+2$

iii. $f(x)=x^4-2x^2+3$

iv. $f(x)=(\ln x-2)^2-4$

v. $f(x)=3+|x-2|$

vi. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

vii. $f(x)=2e^{1-x}-3$, $x\in[0,1]$

viii. $f(x)=1-2\ln(x-1)$, $x\in[2,3]$

47)Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i. $f(x)=3|x-1|-2$

ii. $f(x)=5-(x+2)^4$

iii. $f(x)=2\sqrt{x}-5$

iv. $f(x)=7-3\sqrt{x-1}$

v. $f(x)=7-\dfrac{4}{|x+3|+2}$

vi. $f(x)=\sqrt{6-2x}-3x$

vii. $f(x)=\sqrt{7-x}-\sqrt{x+2}$

viii. $f(x)=-x^2+4|x|-1$

ix. $f(x)=x-6\sqrt{x}+12$

48)Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\sqrt{x^2+1}+4$ και $g(x)=\dfrac{6}{\sqrt{x^2+4}}$.

i. Να βρείτε το ελάχιστο της f .

ii. Να βρείτε το μέγιστο της g .

iii. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha,\beta\in\Re$ ισχύει ότι : $7f(\alpha)-5g(\beta)\geq 20$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Β : ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

➢ Η Εξίσωση : $f(x)=\kappa$

Όταν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ παρουσιάζει ακρότατο ίσο με κ μόνο στη θέση $x=x_0$, τότε : $f(x)=\kappa\Leftrightarrow x=x_0$ και $f(g(x))=\kappa\Leftrightarrow g(x)=x_0\,, g(x)\in\mathrm{A}$.

➢ Η Εξίσωση : $f(x)=g(x)$

Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathrm{A}\to\Re$, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x=x_0$ και η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=x_0$ και ισχύει $f(x_0)=g(x_0)$ τότε : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=x_0$.

Απόδειξη :

Για $x\neq x_0$, επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στη θέση $x=x_0$, είναι $f(x)>f(x_0)$ και επειδή η g παρουσιάζει μέγιστο μόνο στη θέση $x=x_0$, είναι $g(x)<g(x_0)$. Όμως $f(x_0)=g(x_0)$, άρα : $g(x)<g(x_0)=f(x_0)<f(x)$ για κάθε $x\neq x_0$, δηλαδή : $f(x)\neq g(x)$ για κάθε $x\neq x_0$. Άρα : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=x_0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

49)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3}{\mathrm{x}^2+1}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $\mathrm{x}=0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :
α. $f(x)=3$ β. $f\left(x^2-1\right)=3$ γ. $f\left(3-f(x-1)\right)=3$.

Λύση :

i. $D_f=\Re$, αρκεί να δείξω ότι : $f(x)\le f(0)$ για κάθε $x\in\Re$.
$f(x)\le f(0)\Leftrightarrow \dfrac{3}{x^2+1}\le 3\Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+1}\le 1\Leftrightarrow 1\le x^2+1\Leftrightarrow x^2\ge 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\Re$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Τελικά η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x=0$ το $f(0)=3$.

ii. Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x=0$ το $f(0)=3$, άρα $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le 3$ για κάθε $x\in\Re$, και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$. Έτσι :
α. $f(x)=3\Leftrightarrow x=0$.
β. $f\left(x^2-1\right)=3\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=-1$
γ. $f\left(3-f(x-1)\right)=3\Leftrightarrow 3-f(x-1)=0\Leftrightarrow f(x-1)=3\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

50)Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|+1}$ και $g(x)=\ln\left((x-1)^2+1\right)+1$.

i. Να βρείτε τα ακρότατα των f,g.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $\ln\left((x-1)^2+1\right)+1=\dfrac{1}{|x-1|+1}$

Λύση :

i. $D_f=D_g=\Re$. Για κάθε $x\in\Re$ είναι :

- $|x-1|\ge 0\Leftrightarrow |x-1|+1\ge 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{|x-1|+1}\le 1\Leftrightarrow f(x)\le 1\Leftrightarrow f(x)\le f(1)$ άρα η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x=1$ το $f(1)=1$.
- $(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2+1\ge 1\Leftrightarrow \ln\left((x-1)^2+1\right)\ge 0\Leftrightarrow \ln\left((x-1)^2+1\right)+1\ge 1\Leftrightarrow g(x)\ge 1\Leftrightarrow g(x)\ge g(1)$ άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=1$ το $g(1)=1$.

ii. Η εξίσωση : $\ln\left((x-1)^2+1\right)+1=\dfrac{1}{|x-1|+1}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ (1) ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Η f παρουσιάζει μέγιστο μόνο για $x=1$ το $f(1)=1$, άρα $f(x)\le 1\Leftrightarrow 1-f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.
Η g παρουσιάζει ελάχιστο μόνο για $x=1$ το $g(1)=1$, άρα $g(x)\ge 1\Leftrightarrow g(x)-1\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=1$.
Έτσι $(1)\Leftrightarrow f(x)-1=g(x)-1\Leftrightarrow \left(g(x)-1\right)+\left(1-f(x)\right)=0\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)-1=0\Leftrightarrow x=1\\ 1-f(x)=0\Leftrightarrow x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

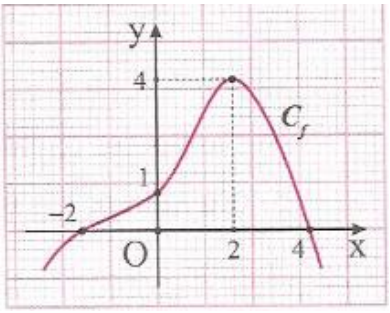
51)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2+3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $f(x)=3$ β. $f(2\mathrm{x}-1)=3$ γ. $f\left(f(x)-2\right)=3$

52)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ του παρακάτω σχήματος.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας.

iv. Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)\ge 0$.

v. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

vi. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

vii. Να δείξετε ότι : $f(x)\le 4$ για κάθε $x\in\Re$.

viii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)=4$ και την ανίσωση : $f(x)<4$.

ix. Να λύσετε την εξίσωση : $4+(x-2)^2 = f(x)$

x. Να λύσετε την εξίσωση : $f(\alpha)+f(e^{\beta})=8$.

53)Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+e^{-x}}{2}$ και $\mathrm{g}(x)=\dfrac{1}{\mathrm{x}^2+1}$.

i. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο $\mathrm{x}_0=0$ και η g μέγιστο μόνο στο $\mathrm{x}_0=0$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α. $f(x^2-1)=1$ β. $\mathrm{g}(\mathrm{e}^{x}-1)=1$ γ. $f\left(g(x)-1\right)=1$ δ. $\mathrm{g}\left(2f(x-3)-2\right)=1$

ε. $\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{e^{x}}=\dfrac{2}{x^2+1}$

iii. Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha\beta\neq 0$, να αποδείξετε ότι : $\left(f(\alpha)-1\right)\left(1-f(\beta)\right)<0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5Γ : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

54)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, καθώς και το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{5}{2},0\right)$. Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το A τη μικρότερη απόσταση.

55)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ και ένα σημείο $\mathrm{M}\left(x,f(x)\right)\in C_f$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M, ώστε η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}(0,0)$, να γίνεται ελάχιστη. Στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της ελάχιστης απόστασης.

56)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+6x-6$, $x\in[1,3]$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $\mathrm{M}\left(x,f(x)\right)\in C_f$, καθώς και τα σημεία $\mathrm{A}\left(1,f(1)\right)$ και $\mathrm{B}\left(3,f(3)\right)$.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, είναι $(\varepsilon):2x-y-3=0$.
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x, η απόσταση του σημείου M, από το ευθύγραμμο τμήμα AB, γίνεται μέγιστη.
iii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της απόστασης του σημείου M από το ευθύγραμμο τμήμα AB.

57)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+8x-6$, $x\in[1,5]$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $\mathrm{M}\left(x,f(x)\right)\in C_f$, καθώς και τα σημεία $\mathrm{A}\left(1,f(1)\right)$ και $\mathrm{B}\left(5,f(5)\right)$.

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, είναι $(\varepsilon):2x-y-1=0$.
ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x, η απόσταση του σημείου M, από το ευθύγραμμο τμήμα AB, γίνεται μέγιστη.
iii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της απόστασης του σημείου M από το ευθύγραμμο τμήμα AB.

58)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, καθώς και το σημείο $\mathrm{A}(0,1)$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $\mathrm{M}\left(x,f(x)\right)\in C_f$.

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d(x)$ του σημείου M από το σημείο A δίνεται από τον τύπο $d(x)=1+f(x)$.
ii. Να βρείτε το σημείο της C_f που απέχει από το A τη μικρότερη απόσταση.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «1-1» ΟΡΙΣΜΟΣ

- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ είναι «1-1», θεωρούμε $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ και προσπαθούμε να δείξουμε ότι $x_1=x_2$. (δηλ. αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$)
- Για να αποδείξουμε ότι η f δεν είναι «1-1», προσπαθούμε να εντοπίσουμε δυο $x_1,x_2\in\mathrm{A}$ με $x_1\neq x_2$ που δίνουν όμως $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν δίνεται η C_f και παρατηρούμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο, τότε η f είναι «1-1». Διαφορετικά δεν είναι.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι και «1-1». Τονίζουμε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. (Δηλ. $\underline{\mu o\nu o\tau o\nu\iota\alpha \Rightarrow "1-1"}$)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

59) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι :

i. $f(x)=1+\ln\sqrt{1+e^{x-1}}$

ii. $f(x)=2x^2+3$

iii. $f(x)=1-4x-3e^{2x-1}$

Λύση :

i. $f(x)=1+\ln\sqrt{1+e^{x-1}}$, πρέπει : $\begin{cases}\sqrt{1+e^{x-1}}>0\\ 1+e^{x-1}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Άρα $D_f=\mathbb{R}$.

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\ln\sqrt{1+e^{x_1-1}}=1+\ln\sqrt{1+e^{x_2-1}}\Rightarrow \ln\sqrt{1+e^{x_1-1}}=\ln\sqrt{1+e^{x_2-1}}\Rightarrow$ $\sqrt{1+e^{x_1-1}}=\sqrt{1+e^{x_2-1}}\Rightarrow 1+e^{x_1-1}=1+e^{x_2-1}\Rightarrow e^{x_1-1}=e^{x_2-1}\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα η $f(x)$ είναι «1-1».

ii. $f(x)=2x^2+3$, $D_f=\mathbb{R}$. Η $f(x)$ δεν είναι «1-1» γιατί υπάρχουν :

$x_1=-1, x_2=1\in D_f=\Re$ με $x_1\neq x_2$

Όμως $f(x_1)=f(-1)=2(-1)^2+3=5$, $f(x_2)=f(1)=2\cdot 1^2+3=5$. Δηλ. $f(x_1)=f(x_2)$.

Άρα εντοπίσαμε δυο $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1\neq x_2$ που δίνουν όμως $f(x_1)=f(x_2)$. Άρα η f δεν είναι «1-1».

iii. $f(x)=1-4x-3e^{2x-1}$ με τον ορισμό δεν μπορώ να εξετάσω αν η $f(x)$ είναι «1-1». Γι' αυτό θα εξετάσω αν είναι γνησίως μονότονη.

Έχω : $D_f=\mathbb{R}$,

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$, με $x_1<x_2\Rightarrow -4x_1>-4x_2\Rightarrow 1-4x_1>1-4x_2$ (1). Επίσης :

$x_1<x_2\Rightarrow 2x_1<2x_2\Rightarrow 2x_1-1<2x_2-1\Rightarrow e^{2x_1-1}<e^{2x_2-1}\Rightarrow -3e^{2x_1-1}>-3e^{2x_2-1}$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $1-4x_1-3e^{2x_1-1}>1-4x_2-e^{x_2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα η f είναι και «1-1».

60) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2f(x)=3e^{2-x}-5$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

Λύση :

1ος τρόπος :

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2)

Επίσης : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -2f(x_1)=-2f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω : $f^3(x_1)-2f(x_1)=f^3(x_2)-2f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 3e^{2-x_1}-5=3e^{2-x_2}-5\Rightarrow 3e^{2-x_1}=3e^{2-x_2}\Rightarrow e^{2-x_1}=e^{2-x_2}\Rightarrow 2-x_1=2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow$

$x_1=x_2$ άρα η f είναι και «1-1».

2ος τρόπος :

Είναι : $f^3(x)-2f(x)=3e^{2-x}-5$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση : $g(x)=x^3-2x$, $x\in\Re$

άρα η (1) γίνεται : $g\big(f(x)\big)=3e^{2-x}-5\Leftrightarrow (g\circ f)(x)=3e^{2-x}-5$ (2), $x\in\Re$

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)\Rightarrow (g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 3e^{2-x_1}-5=3e^{2-x_2}-5\Rightarrow 3e^{2-x_1}=3e^{2-x_2}\Rightarrow e^{2-x_1}=e^{2-x_2}\Rightarrow 2-x_1=2-x_2\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι και «1-1».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

61) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι

i. $f(x)=3e^{2x-3}+2$

ii. $f(x)=1+3e^{1+\sqrt{1-x}}$

iii. $f(x)=e^{x-1}+2x-5$

iv. $f(x)=3\ln(x-2)+3x+3$

v. $f(x)=3x^2+2$

vi. $f(x)=x^2-5x+6$

vii. $f(x)=|x-2|$

62) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=4x^3-2$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ «1-1» & ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- Όταν μια συνάρτηση είναι «1-1», τότε ισχύει η ισοδυναμία $f(g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow g(x)=h(x)$
- Αν μια συνάρτηση είναι «1-1», τότε η εξίσωση $f(x)=0$, αλλά και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x)=\alpha$ με $\alpha\in\Re$, έχει το πολύ μια ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

63) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση : $(f\circ f)(x^2-2x)=(f\circ f)(3x-6)$.

Λύση :

$f\left(f(x^2-2x)\right)=f\left(f(3x-6)\right)\overset{f\downarrow\Rightarrow f\text{"1–1"}}{\Longleftrightarrow} f(x^2-2x)=f(3x-6)\overset{f\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} x^2-2x=3x-6\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x=2\ \acute{\eta}\ x=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

64) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}-\sqrt{x}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1)+f(4)=12$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha=12$.
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{12}{|2x-1|+1}-\frac{12}{|x+4|+1}=\sqrt{|2x-1|+1}-\sqrt{|x+4|+1}$.

65) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση : $(f\circ f)(x^2+4x)=(f\circ f)(x+4)$.

66) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f\left(f(x)\right)=2x+3$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3+x)-f(4-x)=0$.

67) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)-f(x)=2x-4$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
ii. Να βρείτε την τιμή f(2)
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(4-f(x^2+x)\right)-2=0$.

68) Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(3-x)+f(x+5)=0$ για κάθε $x\in\Re$ και είναι γνησίως φθίνουσα .

i. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^2+2x-4)<0$. ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x)=0$.

69) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+3e^{x-2}$, καθώς και συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(g\circ f)(x)=8-3e^{x-2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η g είναι «1-1».
ii. Να βρείτε την τιμή f(2)
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(e^x-1+f(|x|-3)\right)-f(e^x+1)=0$.

70)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=(x-2)f(x)$ για κάθε $x\in\Re$

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
ii. Να βρείτε την τιμή f(3)
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x+1-f(|x|-1)\right)-f(x-2)=0$.

71)Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x=1-x^7$ ii. $\ln(x-1)=2-x$

72)Αν η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$ είναι γνησίως αύξουσα τότε να λυθεί η εξίσωση :

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right].$$ *(Θέμα Γ 2010)*

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8^Α</u> : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $f^{-1}(x)$

Έστω $f:\mathrm{A}\to\Re$ μια συνάρτηση. Για να βρούμε την αντίστροφη της f :

1) Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
2) Δείχνουμε ότι η f είναι «1-1»
3) Θέτουμε $y=f(x)$ (οπότε $f^{-1}(y)=x$) και λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x, βάζοντας κατάλληλους περιορισμούς για το y.
4) Η συναλήθευση των περιορισμών για το y μας δίνει το <u>σύνολο τιμών</u> της f που είναι το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.
5) Αν η λύση της εξίσωσης $y=f(x)$ ως προς x είναι $x=g(y)$, τότε έχουμε $f^{-1}(y)=g(y)$. Θέτουμε όπου y το x και έχουμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

73)Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x)=2e^{3x-2}+1$ είναι $1-1$ και να βρεθεί η αντίστροφή της.

<u>Λύση :</u>

- Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1=x_2$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2e^{3x_1-2}+1=2e^{3x_2-2}+1\Rightarrow e^{3x_1-2}=e^{3x_2-2}\Rightarrow 3x_1-2=3x_2-2\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2.$$

- Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y=f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν: $f(x)=y \Leftrightarrow 2e^{3x-2}+1=y \Leftrightarrow 2e^{3x-2}=y-1 \Leftrightarrow e^{3x-2}=\frac{y-1}{2} \Leftrightarrow 3x-2=\ln\frac{y-1}{2}$, $y>1$

Άρα : $3x=\ln\frac{y-1}{2}+2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2}+\frac{2}{3}$, $y>1$.

Συναληθεύοντας έχω : $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2}+\frac{2}{3}\in\mathbb{R}$ για κάθε $y>1$

Επομένως, $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2}+\frac{2}{3}$, $y>1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3},\qquad x>1.$$

74)Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

(Άσκηση 2vii) σελ. 156 σχολικού βιβλίου Α΄ Ομάδας)

Λύση :

$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, πρέπει $e^x+1\neq 0 \Leftrightarrow e^x\neq -1 \Leftrightarrow x\in\Re$ άρα $D_f=\Re$.

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\Re$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με ότι $x_1=x_2$

Έχω $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{e^{x_1}-1}{e^{x_1}+1}=\dfrac{e^{x_2}-1}{e^{x_2}+1}\Rightarrow \left(e^{x_1}-1\right)\left(e^{x_2}+1\right)=\left(e^{x_1}+1\right)\left(e^{x_2}-1\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x_1}\cdot e^{x_2}+e^{x_1}-e^{x_2}-1=e^{x_1}\cdot e^{x_2}-e^{x_1}+e^{x_2}-1\Rightarrow 2e^{x_1}=2e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η $f(x)$ είναι και «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι και αντιστρέψιμη.

Θέτω $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\Leftrightarrow y(e^x+1)=e^x-1\Leftrightarrow ye^x+y=e^x-1\Leftrightarrow ye^x-e^x=-y-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x-ye^x=y+1\Leftrightarrow \Leftrightarrow e^x(1-y)=y+1 \overset{\substack{\Gamma\iota\alpha \\ y\neq 1 (1)}}{\Longleftrightarrow} e^x=\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow$

(επίσης πρέπει : $\dfrac{y+1}{1-y}>0\Leftrightarrow (y+1)(1-y)>0\Leftrightarrow 1-y^2>0\Leftrightarrow y\in(-1,1)$ (2))

$\Leftrightarrow \ln e^x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}$, $y\in(-1,1)$

Συναληθεύοντας έχω : $x\in\Re\Leftrightarrow \ln\dfrac{y+1}{1-y}\in\Re$ για κάθε $y\in(-1,1)$.

Τελικά από (1) και (2) ισχύει ότι πρέπει $y\in(-1,1)$, άρα $D_{f^{-1}}=(-1,1)=f(\mathrm{A})$.

Άρα : $x=\ln\dfrac{y+1}{1-y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1+y}{1-y}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, με $D_{f^{-1}}=(-1,1)=f(\mathrm{A})$

75) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ όταν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και γνωρίζουμε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

i. $f^3(x)+2f(x)+2x-1=0$

ii. $(f\circ f)(x)+x=f(x)$ (να βρεθεί η $f^{-1}(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$)

Λύση :

i. $f^3(x)+2f(x)+2x-1=0\Leftrightarrow f^3(x)+2f(x)=1-2x$ (1)

Έστω $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$, με $f(x_1)=f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1=x_2$.

Έχω : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (2)

Επίσης : $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (2) και (3) και έχω : $f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 1-2x_1=1-2x_2\Rightarrow -2x_1=-2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι «1-1» και άρα f αντ/μη.

<u>1^{ος} Τρόπος</u> Θέτω $y=f(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} y^3+2y=1-2x\Leftrightarrow 2x=1-y^3-2y\Leftrightarrow x=\dfrac{1-y^3-2y}{2}\Leftrightarrow$

$f^{-1}(y)=\dfrac{1-y^3-2y}{2}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1-x^3-2x}{2}$

<u>2^{ος} Τρόπος</u> <u>*(Αν γνωρίζουμε από εκφώνηση ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ ή δίνει $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ τότε στη δοσμένη σχέση μπορώ να θέσω όπου x το $f^{-1}(x)$)*</u>

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$,, άρα αν όπου x βάλω το $f^{-1}(x)$ έχω :

$$\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)^3 + 2f\left(f^{-1}(x)\right) = 1 - 2f^{-1}(x) \overset{f\left(f^{-1}(x)\right)=x}{<=====>} x^3 + 2x = 1 - 2f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - x^3 - 2x}{2}.$$

ii. $(f \circ f)(x) + x = f(x) \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) - f(x) = -x$ (1)

Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \Re$, με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε με τον ορισμό ότι $x_1 = x_2$.

Έχω $f(x_1) = f(x_2)$ άρα θα είναι και $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2)$ (2)

Επίσης $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$ (3)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω :

$(f \circ f)(x_1) - f(x_1) = (f \circ f)(x_2) - f(x_2) \overset{(1)}{\Rightarrow} -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι «1-1» και άρα η f είναι και αντιστρέψιμη.

1ος Τρόπος Θέτω $f(x) = y$ αρά $(1) \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) - f(x) = -x \overset{f(x)=y}{\Leftrightarrow} f(y) - y = -x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y - f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y - f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - f(x)$

2ος Τρόπος Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \Re$ και έχει σύνολο τιμών το $\Re$, άρα αν όπου x βάλω το $f^{-1}(x)$ έχω :

$$f\left(f(f^{-1}(x))\right) - f\left(f^{-1}(x)\right) = -f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) - x = -f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - f(x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 3$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τις τιμές : $f^{-1}(-2)$ και $\left(f \circ f^{-1}\right)(5)$.

77) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = \ln x - 3$

ii. $f(x) = e^{x-1} - 2$

iii. $f(x) = \sqrt{x-5} - 2$

iv. $f(x) = x^3$ *(ΘΕΜΑ Γ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016)*

v. $f(x) = \ln \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

vi. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $x > 1$

vii. $f(x) = x^2 + 6x + 7$, αν $x \in [-3, +\infty)$.

viii. $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

ix. $f(x) = 1 + \ln\left(\sqrt{x-1} + 1\right)$

78) Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την C_f και $C_{f^{-1}}$.

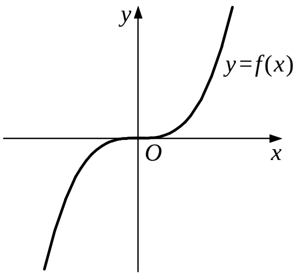
i. $f(x) = 2x + 4$

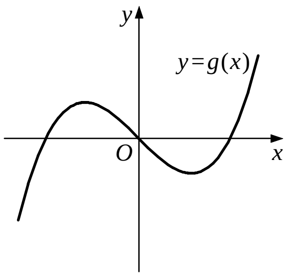
ii. $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

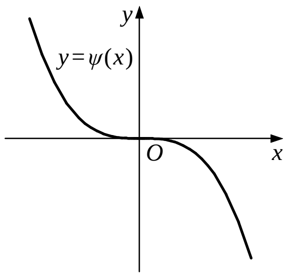
iii. $f(x)=e^{x+1}-2$

iv. $f(x)=\sqrt{x-3}-2$

79) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g,φ και ψ.







Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f,g,φ,ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

80) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3f(x)+x-2=0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨

ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8^{B} : ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ

Αν μια συνάρτηση f δίνεται με πολλαπλό τύπο και στα επιμέρους διαστήματα είναι 1-1, τότε για να είναι 1-1 σε όλο το πεδίο ορισμού της αρκεί τα επί μέρους σύνολα τιμών να είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x. Για να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης που δίνεται με πολλαπλό τύπο, βρίσκουμε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$ για τον κάθε κλάδο της συνάρτησης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

81)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & x\le 1 \\ 3-2x, & x>1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

82)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} \ln x-2\,, & x\in(0,1) \\ \sqrt{x-1}\,, & x\ge 1 \end{cases}$. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

83)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x^2+2\,, & x\in(-2,0] \\ 3x-7\,, & x\in(0,3) \end{cases}$. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

84)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 2x+1\,, & x<2 \\ \sqrt{x-2}+2\,, & x\ge 2 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι αντιστρέψιμη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ $f^{-1}(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$

- Έστω $f:\mathrm{A}\to\Re$ μια «1-1» συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}(x)$. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, προκύπτει ότι οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες :

$$\boxed{f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x}$$

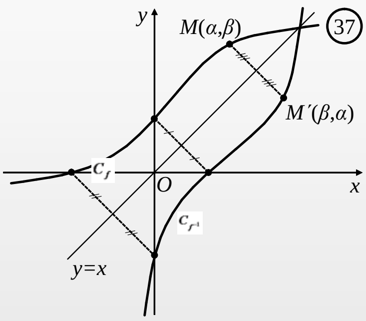
Η επίλυση των παραπάνω εξισώσεων μας επιτρέπει να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$

- Έστω $f:\mathrm{A}\to\Re$ μια «1-1» συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

1ος Τρόπος : Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι <u>γνησίως αύξουσα</u>, τότε οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$, $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες :

$$\boxed{\begin{aligned}&f(x)=f^{-1}(x)\\ &\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\end{aligned}}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι ίδια με τα σημεία τομής της C_f με την $y=x$ **(*απόδειξη*)** (ή της $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$)

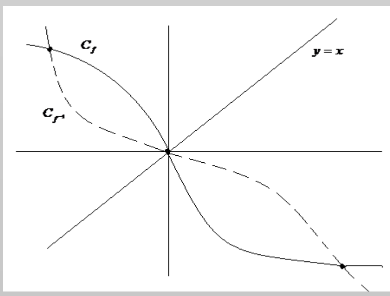


2ος Τρόπος : Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$,

αρκεί να λύσουμε το σύστημα $\begin{cases} y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x)\\ f(y)=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y)=x\\ f^{-1}(x)=y\end{cases}$

Με γνωστή f Με γνωστή f^{-1}

(Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$ δεν είναι ισοδύναμες. Μπορεί δηλαδή να υπάρχουν σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ που δεν ανήκουν στην ευθεία y=x. Σε αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος : $\begin{cases} y=f(x)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x)\\ x=f(y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f^{-1}(y)\\ y=f^{-1}(x)\end{cases}$ 2ος τρόπος)



(*απόδειξη*)

Έστω ότι υπάρχει ένα $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\boxed{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}$ (στο x_0 έχω σημείο τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$) θα δείξω ότι $\boxed{f(x_0)=x_0}$ (δηλ. στο x_0 σημείο τομής της C_f και $y=x$)

Έστω $f(x_0)>x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(f(x_0))>f(x_0) \overset{f(x_0)=f^{-1}(x_0)}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x_0))>f(x_0) \Leftrightarrow x_0>f(x_0)$ άτοπο! Ομοίως καταλήγω σε άτοπο αν υποθέσω $f(x_0)<x_0$, άρα τελικά $\boxed{f(x_0)=x_0}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

85)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3-x+12$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(f(|x|-1)+8\right)<1$

Λύση :

i. $D_f=\mathbb{R}$, Έστω $x_1,x_2 \in D_f=\mathbb{R}$, με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \Rightarrow -x_1^3>-x_2^3$ (1). Επίσης :
$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow -x_1+12>-x_2+12$ (2)
Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $-x_1^3-x_1+12>-x_2^3-x_2+12 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η f είναι «1-1» και άρα η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :
$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y=x \end{cases}$ από όπου προκύπτει $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x^3-x+12=x \Leftrightarrow x^3+2x-12=0$

1	0	2	-12		2
	2	4	12		
1	2	6	0		

Άρα $x^3+2x-12=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+6)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
ή $x^2+2x+6=0$ Αδύνατη
Άρα αφού $y=x \Leftrightarrow y=2$. Δηλ. η $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$ τέμνονται στο σημείο Α(2,2).

iii. $f^{-1}\left(f(|x|-1)+8\right)<1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(f(|x|-1)+8\right)\right)>f(1) \Leftrightarrow f\left(|x|-1\right)+8>10 \Leftrightarrow f\left(|x|-1\right)>2 \Leftrightarrow$
$\overset{f(2)=2}{\Leftrightarrow} f\left(|x|-1\right)>f(2) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} |x|-1<2 \Leftrightarrow |x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$ ή $x\in(-3,3)$

86)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3x^5+x+3$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right)>0$

Λύση :

i. $D_f=\Re$, Έστω $x_1,x_2 \in D_f=\Re$, με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^5<x_2^5 \Rightarrow 3x_1^5<3x_2^5$ (1). Επίσης :
$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+3<x_2+3$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $3x_1^5 + x_1 + 3 < 3x_2^5 + x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη.

ii.1ος τρόπος : Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$ από όπου προκύπτει $f(x) = f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) = x \Leftrightarrow$ *(θέλει απόδειξη)*

$\Leftrightarrow 3x^5 + x + 3 = x \Leftrightarrow 3x^5 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^5 = -1 \Leftrightarrow x = -1$

Άρα αφού $y = x \Leftrightarrow y = -1$. Δηλ. η C_f με την $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}(-1,-1)$.

2ος τρόπος : Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x^5 + x + 3 \\ 3y^5 + y + 3 = x \end{cases}$. Το σύστημα που προκύπτει είναι φανερό ότι είναι πολύ δύσκολο να λυθεί. Έτσι στο σύστημα : $\begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases}$ προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε : $y + f(y) = f(x) + x$ (3). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$, έτσι η (3) γίνεται : $g(x) = g(y)$ (4). Για κάθε $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow\mathfrak{R}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2)$

$$x_1 < x_2 \quad +$$

$$f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Οπότε η $g \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow g\,"1-1"$, έτσι έχουμε : (4) $\Leftrightarrow g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x^5 + x + 3 = x \Leftrightarrow x = -1$. Άρα και $y = -1$. Δηλ. η C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο $\mathrm{A}(-1,-1)$.

iii. $f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right) > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(f(x^2-3)-4\right)\right) > f(0) \Leftrightarrow f\left(x^2-3\right) - 4 > 3 \Leftrightarrow f\left(x^2-3\right) > 7 \Leftrightarrow$

$\overset{f(1)=7}{\Leftrightarrow} f\left(x^2-3\right) > f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$, έχω $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	0	+

Άρα επειδή θέλω : $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

87)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη. Σε αυτή την περίπτωση τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται από τη λύση του συστήματος :

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \quad (1) \\ x = -y^3 \quad (2) \end{cases}$. Η (2) λόγω της (1) γίνεται : $x = -\left(-x^3\right)^3 \Leftrightarrow x = x^9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \& (1) \Leftrightarrow y = 0 \;\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \mathrm{A}(0,0) \\ x = 1 \quad \& (1) \Leftrightarrow y = -1 \;\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \mathrm{B}(1,-1) \\ x = -1 \quad \& (1) \Leftrightarrow y = 1 \;\acute{\alpha}\rho\alpha \quad \Gamma(-1,1) \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

88)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$

89)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-3) + x - 1$ με σύνολο τιμών το με $\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

90)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 1$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

91)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 4x - 4$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}\left(x^2 - 13\right) < 2$

92)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^9 + 4x + 4$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
ii. Να υπολογίσετε το $f^{-1}(9)$
iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(x^2 - 3x + 11\right) = 1$

93)Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση : $2f^3(x) + f(x) = x + 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨
ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

94) Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, όπου για την f ισχύει $(f\circ f)(x)=x+f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
ii. Να βρείτε το $f(0)$
iii. Αν ισχύει $f\left(g(e^x)-2x+3\right)=0$, $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση g.

95)Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(g\circ f)(x)=2x^5+e^{f(x)}+1, x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^3)$

96)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=x^2-x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

i. $f(1)=1$
ii. Η συνάρτηση $g(x)=x^2-xf(x)+1$, $x\in\mathbb{R}$ δεν είναι συνάρτηση 1-1.

97) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-x$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
ii. Να εξεταστεί αν ορίζεται η f^{-1}.
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=1-x$
iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x)\le 1-x$

98)Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $(f\circ f)(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι :

i. η f είναι «1-1»
ii. $f^{-1}=-f$
iii. η f δεν είναι γνησίως μονότονη
iv. η f είναι περιττή
v. f(0)=0

99)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)-f(x)=-x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη
ii. Να βρείτε την τιμή f(2)
iii. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα
iv. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(4-f(|x|-1)\right)=2$.

100) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(1,+\infty)$ και για την οποία ισχύει : $f^2(x)+1=2f(x)+e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$
ii. Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨
iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

101) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^5(x)+2f(x)-x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f^{-1}(x)=0$
iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

102) Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ισχύει $(f\circ g)(x)=x$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. να δείξετε ότι η g είναι «1-1»
ii. να λύσετε την εξίσωση $g(x+1)=g(x^2+1)$.

103) Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η $(f\circ g)(x)$ να είναι «1-1».

i. Να δείξετε ότι και η g είναι «1-1»
ii. να λύσετε την εξίσωση $g(2x^2+1)=g(x^2+3x-1)$

104) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)=3-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη
ii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=3$
iii. Αν η f είναι γνησίως μονότονη να βρεθεί το είδος μονοτονίας της.
iv. Να λυθεί η ανίσωση : $f(e^{x-1}+\ln x)>f(2-x)$

105) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.
iii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y=x. (2^{O} 2006)

106) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+2$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(2-e^{x-1})=3$
iv. Να λύσετε την ανίσωση : $f(3-e^{x-1})<e+2$

107) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(-2,3) και Β(2005,5)

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(2007+f^{-1}(x^2-1)\right)=5$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}(x-3)>2005$

108) Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία Α(3,4) και Β(6,-2).

i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.
ii. Να λυθεί η εξίσωση $f\left(-3+f^{-1}(|x|-5)\right)=4$
iii. Να λυθεί η ανίσωση : $f^{-1}\left(f(x^2+2)+6\right)<3$

109) Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f με πεδίο ορισμού του R και σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει : $f(e^x+2)+f(x+3)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x .
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(6-f^{-1}(x^2-4)\right)>0$.

110) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=3x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
ii. Να βρείτε την τιμή f(1)
iii. Να εκφράσετε την f^{-1} με τη βοήθεια της f
iv. Να αποδείξετε ότι $f(3x-2)=3f(x)-2$

111) Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=\ln x$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.
i. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(2010)$
iii. Να αποδείξετε ότι $f(\ln x)=\ln\left(f(x)\right)$ για κάθε $x\in(e,+\infty)$.
iv. Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=e^{f(x)}$

112) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x))+x=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
i. Η f είναι περιττή ii. Η f αντιστρέφεται iii. Η f^{-1} είναι περιττή iv. $f^{-1}=-f$

113) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει : $(f\circ f)(x)=x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
i. Η f είναι 1-1, έχει σύνολο τιμών το $\Re$ και αντιστρέφεται.
ii. $f^{-1}(x)=1+f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
iii. Η C_f δεν έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.
iv. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι η C_f είναι κάτω από την ευθεία y=x.

114) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το R και ικανοποιεί τη σχέση : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τη x=0, τότε να αποδείξετε ότι :
iii. Η f είναι αντιστρέψιμη
iv. Ισχύει $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

115) Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση : $f\left(f(x)\right)=2g(x)-x$.
i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
ii. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης : $h(x)=f(x)-g(x)$.
iii. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=x_0$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f,C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(f(x+x_0-2)\right)+x+x_0=2f\left(x+x_0-2\right)+2$

v. Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(f(\ln x+x_0+1)\right)+\ln x+1<x_0$ *(study4exams)*

116) Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

i. Να ορίσετε την συνάρτηση $f\circ g$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

iii. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f\circ f\circ g$. *(study4exams)*

117) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

- $(f\circ f)(x)+2f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $f(2)=5$

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση : $f\left(f^{-1}(2x^2+7x)-1\right)=2$ *(study4exams)*

118) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3f(x)+2f^3(x)=4x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(2e^{x-1}\right)-f(3-x)=0$. *(study4exams)*

119) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

iv. Να δείξετε ότι : $f(x)+f(2016x)<f(2015x)+f(2017x)$ για κάθε $x>0$.

v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^8)$, $x>0$.

120) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση : $e^x=1-x$.

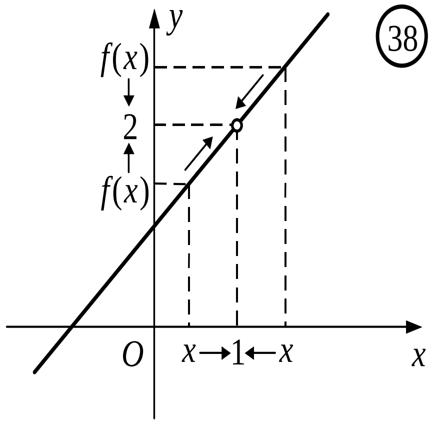
iii. Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

iv. Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$.

v. Να λύσετε την ανίσωση $(g\circ f)(x)>0$. *(Ε.Μ.Ε. 2008)*

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \Re$

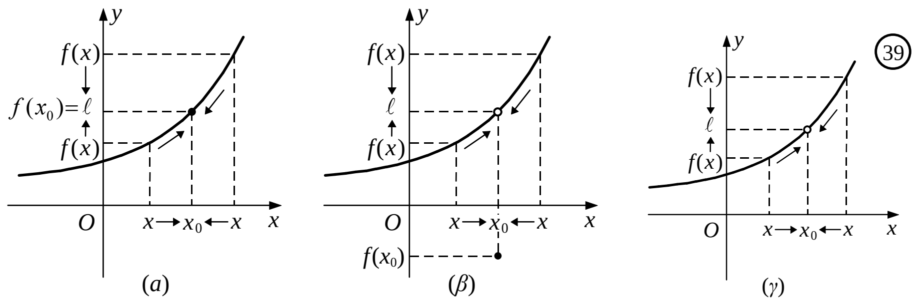
Α. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ



- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$. Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\Re-\{1\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1, \qquad x\neq 1.$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y=x+1$ με εξαίρεση το σημείο Α(1,2) (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:
"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x\neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και διαβάζουμε "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2".
Γενικά : Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και διαβάζουμε "το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή "το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



ΣΧΟΛΙΟ
Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι :

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής :

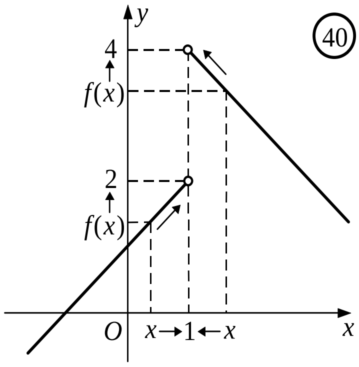
$$(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha,x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0,\beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

Β. ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

• Έστω, τώρα, η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases}$,
της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



Παρατηρούμε ότι :

— Όταν το *x* προσεγγίζει το 1 από αριστερά $(x<1)$, τότε οι τιμές της *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$.

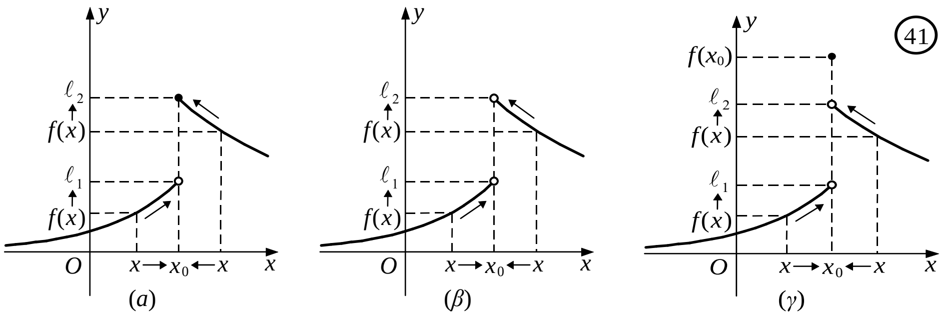
— Όταν το *x* προσεγγίζει το 1 από δεξιά $(x>1)$, τότε οι τιμές της *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$.

Γενικά :

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το *x* προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές $(x<x_0)$, τότε γράφουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell_1$

και διαβάζουμε : "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης *f* προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το *x* προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές $(x>x_0)$, τότε γράφουμε : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell_2$ και διαβάζουμε : "το όριο της $f(x)$, όταν το *x* τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".



Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της *f* στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της *f* στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της *f* στο x_0.

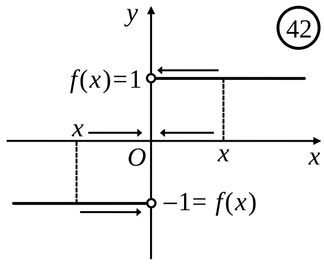
Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell, \quad \text{αν και μόνο αν} \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell}$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0=0$, αφού:

— για $x<0$ είναι $f(x)=\dfrac{-x}{x}=-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$, ενώ

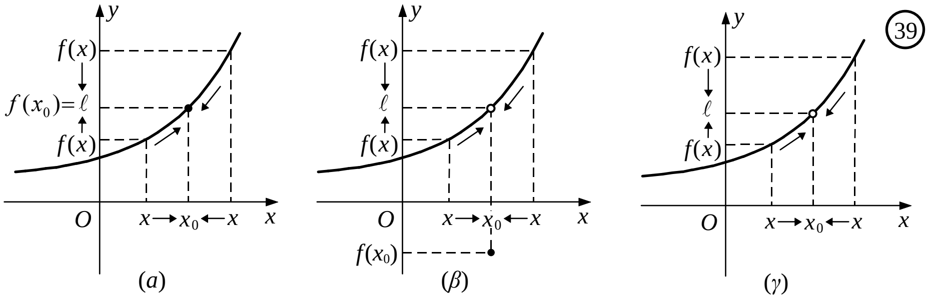
— για $x>0$ είναι $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, και έτσι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$



12. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_o και τα πλευρικά όρια της f στο x_o;

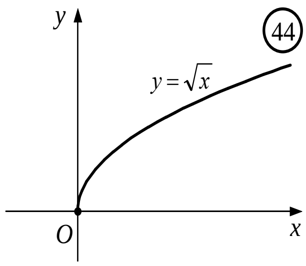
<u>Απάντηση :</u>

Ισχύει ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$



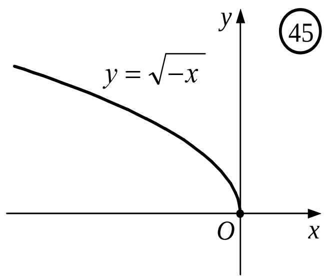
• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0,β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α,x_0), τότε ορίζουμε : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ (Σχ. 44)



• Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α,x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0,β), τότε ορίζουμε : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{-x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{-x}=0$ (Σχ. 45)



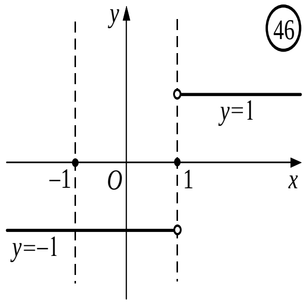
<u>Παρατηρήσεις :</u>

α) Ισχύει ότι :

(α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \underset{\substack{x\to x_0\\ h\to 0}}{\overset{x=x_0+h}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

β) Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η *f*.



Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=\dfrac{-(x-1)}{x-1}=-1$. Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

γ) Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση *f* έχει **κοντά στο** $\boldsymbol{x_0}$ μια ιδιότητα *P* θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

i) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα *P*.

ii) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α,x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα *P*, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0,β).

iii) Η *f* είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0,β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα *P*, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α,x_0).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ *είναι θετική κοντά στο* $x_0=0$*, αφού ορίζεται στο σύνολο* $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ *και είναι θετική σε αυτό.*

1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

13. Να γράψετε τις ιδιότητες του ορίου στο x_o.

Απάντηση :

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

β) Θεώρημα 1ο *(πράξεις συναρτήσεων και όρια)*

Αν υπάρχουν στο $\Re$ τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in R$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0.

Παρατηρήσεις :

- Οι ιδιότητες 1. και 3. ισχύουν και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.
- Τα αντίστροφα των ιδιοτήτων 1., 2., 3., 4., 5. Δεν ισχύουν πάντα. Για παράδειγμα μπορεί να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ και να μην υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0.

  Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x>0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς τα όρια των f και g στο 0 δεν υπάρχουν, όμως

  - $(f+g)(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} = 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\left(0\cdot f(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0}(-1) = -1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(-1) = -1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\left|f(x)\right| = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

γ) Είναι : $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu$, $\nu \in N^*$ για παράδειγμα $\lim\limits_{x\to x_0} x^\nu = x_0^\nu$

δ) Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in R$. Είναι : $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$

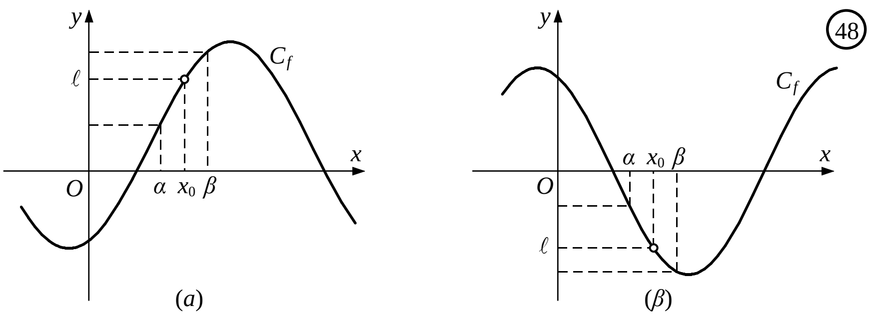
$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Άρα : $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

ε) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0\in R$ με $Q(x_0)\neq 0$. Θα είναι τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0)\neq 0$

στ) Θεώρημα 2ο *(πρόσημο συναρτήσεων και όρια)*

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

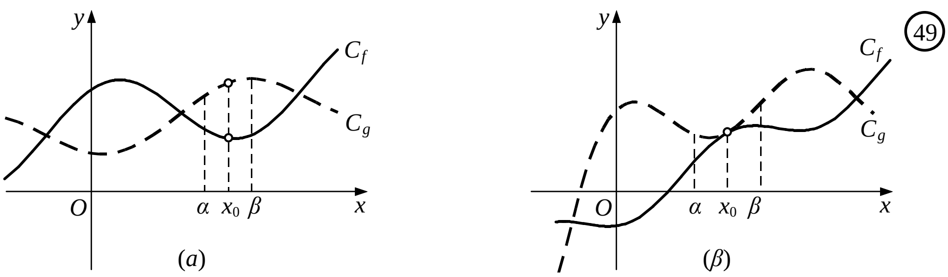


Παρατήρηση :

- Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και είναι $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq 0$
- Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και είναι $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq 0$

ζ) Θεώρημα 3ο *(διάταξη και όρια)*

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

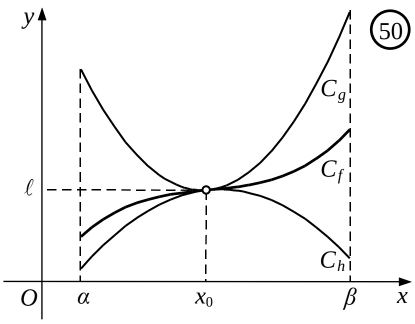


Παρατήρηση : Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- Αν $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x)>g(x)$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0.

η) Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι “κοντά στο x_0” μια συνάρτηση f “εγκλωβίζεται” (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



Κριτήριο παρεμβολής **(2016 Β΄, 2021)**

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l \in \Re$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$

θ) Ισχύει ότι *(τριγωνομετρικά όρια)*

- $|ημx| \le |x|$, για κάθε $x \in R$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} ημx = ημx_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} συνx = συνx_0$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1}$
- $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{συνx-1}{x} = 0}$

14. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο x_o.

Απάντηση :

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, δηλαδή το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u=g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

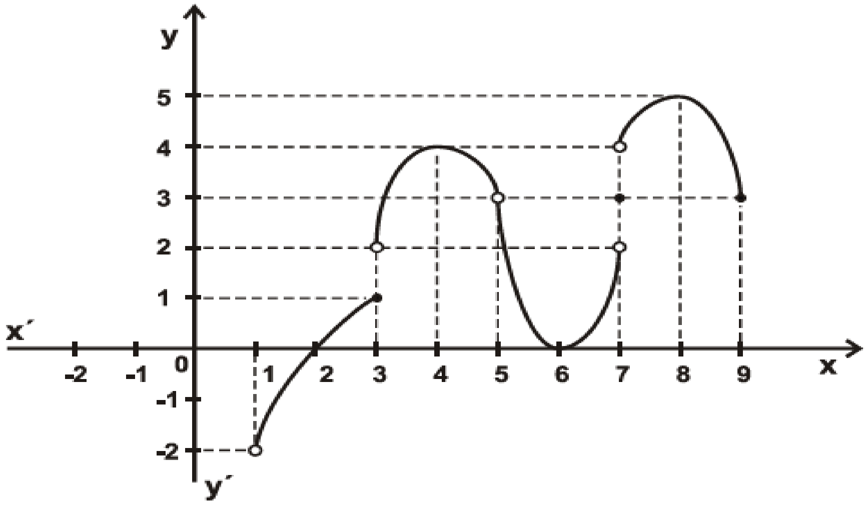
Αν $g(x) \ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. *(Θέμα Β 2016Β)*



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και τις τιμές της f :

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $f(3)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$, $f(7)$ ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση :

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι : $A_f = (1,5) \cup (5,9]$, ενώ το σύνολο τιμών της f είναι : $f\left(A_f\right) = (-2,5]$.

ii. α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2$.

β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$ άρα $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ επομένως το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης $f(3) = 1$.

γ) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$.

δ) $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 4$ άρα $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$ επομένως το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης $f(7) = 3$.

ε) $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9^-} f(x) = 3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

2) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

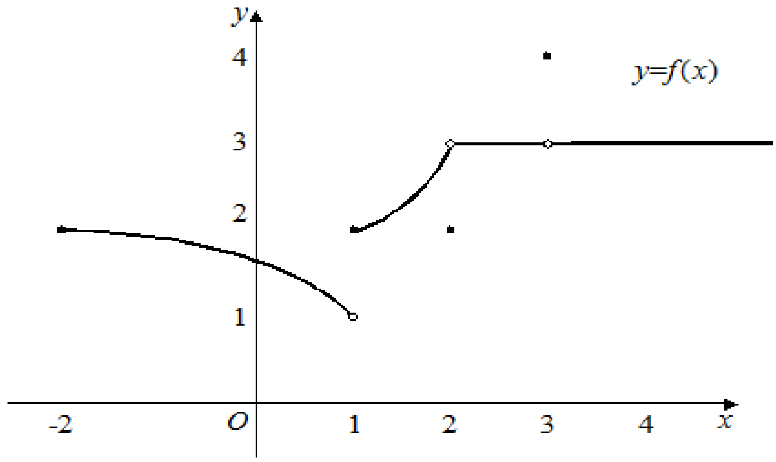
i. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x-2}$, $x_0 = 2$

ii. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ -x+1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

iv. $f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0 = 0$.

3) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x\to -2} f(x)$ β) $\lim_{x\to 1} f(x)$ γ) $\lim_{x\to 2} f(x)$ δ) $\lim_{x\to 3} f(x)$ ε) $\lim_{x\to 4} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ x_0

Για να υπολογίσουμε ένα όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$, αρχικά θέτω όπου x το x_0

Περίπτωση 1η Αν το αποτέλεσμα είναι αριθμός $l \in \Re$ τότε το $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Περίπτωση 2η Αν μετά την αντικατάσταση προκύψει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, τότε **παραγοντοποιώ** αριθμητή και παρανομαστή με σκοπό να απλοποιηθεί ο παράγοντας της μορφής $x - x_0$

Περίπτωση 3η Αν έχουμε όριο άρρητης συνάρτησης (που περιέχει ρίζες) και προκύπτει η απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση του όρου ή των όρων που περιέχει ρίζα

Περίπτωση 4η Αν προκύψει $\frac{\alpha}{0} \pm \frac{\beta}{0}$ τότε κάνω ομώνυμα τα κλάσματα και προκύπτει όριο της μορφής $\frac{0}{0}$, οπότε και εργάζομαι όπως παραπάνω.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ :

- **Κοινός παράγοντας :** Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους ή κατά ομάδες.

- **Ταυτότητες :** Συνήθως χρησιμοποιούμε τις Ταυτότητες

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

- **Τριώνυμο :**

  Αν Δ>0 τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

  Αν Δ=0 τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$

  Αν Δ<0 τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

- **Σχήμα Horner :** Δόκιμη κάνω πρώτα με το x_0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 1η

4) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 1}(x^5 - 6x + 2013)$ ii. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2 + 9}$ iii. $\lim_{x\to -2}(x^3 - 7x^2 + 28)$

Λύση :

i. $\lim_{x\to 1}(x^5 - 6x + 2013) = 1^5 - 6\cdot 1 + 2013 = 1 - 6 + 2013 = 2008$

ii. $\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{4^2+9}=5$

iii. $\lim_{x\to -2}(x^3-7x^2+28)=(-2)^3-7\cdot(-2)^2+28=-8-28+28=-8$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 2η

5) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$

ii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$

iii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$`

iv. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$

Λύση :

i. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(x^2\right)^2-4^2}{x^3-2^3}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x^2+4)}{(x^2+2x+4)}=\dfrac{32}{12}=\dfrac{8}{3}$

ii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

iii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x}{(x+1)}=\dfrac{1}{2}$

iv. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3-3^3}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+3-3)[(x+3)^2+3(x+3)+3^2]}{x}=$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x^2+6x+9+3x+9+9)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+6x+9+3x+9+9}{1}=27$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 3η

6) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

ii. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

iv. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(9-x)(3+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{(9-x)(3+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{3+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{6}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}^{\,2}}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1+x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{2}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2+5-9)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

iv. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{12}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ : Περίπτωση 4η

7) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$

Λύση : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}-\dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+2x+2-3x-3}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

8) Έστω για τις συναρτήσεις f,g ισχύουν : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to 2}g(x)=-2$. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2}\left(3f(x)+|g(x)|+f(x)\cdot g^2(x)\right)$.

9) Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x\to 2} f(x)=4$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} g(x)$ αν:

i. $g(x)=3(f(x))^2-5$

ii. $g(x)=\dfrac{|2f(x)-11|}{(f(x))^2+1}$

iii. $g(x)=(f(x)+2)(f(x)-3)$.

10) Να εξετάσετε αν είναι καλώς ορισμένα τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-1}$

ii. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-2}$

iii. $\lim_{x\to -1}(\ln x)$

11) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 0}(2\eta\mu x-3\sigma\upsilon\nu x)$

ii. $\lim_{x\to e}[\ln(x^2-ex+1)]$

iii. $\lim_{x\to \pi}(\varepsilon\varphi x+\sigma\upsilon\nu^2 x)$

12) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

ii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x-1}$

iii. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$

iv. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

v. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-x}$

vi. $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x^3-9x}$

13) Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+4x-2}{x^2-1}$

ii. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x+5}{2x^2-x-1}$

iii. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-10x+8}{x^2+x-6}$

iv. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-5x+6}$

v. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x+5}{(2x-1)^3-1}$

vi. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}\right)$

vii. $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$

viii. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

14)Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

ii. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

iii. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

iv. $\lim_{x\to 3}\frac{1-\sqrt{x-2}}{x-3}$

v. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}$

15)Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

ii. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{3x+\sqrt{x^2+8}}$

iii. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4x^2+3}+2x-3}{6x^2-x-1}$

iv. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2-2x}}{\sqrt{3x+7}-2\sqrt{x+2}}$

16)Να λυθούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3-x}}{x^3-4x}$ <u>υποδ.</u> όταν έχω $\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}$, τότε η συζυγής παράσταση είναι $\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2$ δηλ.

$$(\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)})\cdot(\sqrt[3]{f(x)}^2+\sqrt[3]{f(x)}\cdot\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g(x)}^2)=\sqrt[3]{f(x)}^3-\sqrt[3]{g(x)}^3=f(x)-g(x)$$

ii. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$

iii. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt[3]{9-x}-1}{x^2-1}$ <u>υποδ.</u> όταν έχω παράσταση της μορφής $\sqrt[\kappa]{f(x)}\pm\sqrt[\lambda]{g(x)}\pm\lambda$, τότε διασπάμε τον αριθμό λ σε δυο αριθμούς (Οι αριθμοί αυτοί είναι αντίθετοι των τιμών που θα προκύψουν από τις $\sqrt[\kappa]{f(x)}$ και $\sqrt[\lambda]{g(x)}$, αν θέσουμε σ' αυτές όπου x το x_0). Στη συνέχεια χωρίζουμε το κλάσμα σε 2, όπου κάθε κλάσμα περιέχει μια ρίζα και ένα αριθμό και τέλος υπολογίζουμε το όριο κάθε κλάσματος πολλαπλασιάζοντας με την κατάλληλη συζυγή παράσταση.

iv. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{8-x}-5}{x^2-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}-5}{x^2-25}$

vi. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}-\sqrt{3}-2}{x-1}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ υποδ. όταν έχω στο ίδιο όριο $\sqrt[\kappa]{f(x)},\sqrt[\lambda]{f(x)}$ (δηλ. ριζικά διαφορετικών τάξεων με το ίδιο υποριζο) τότε θέτω $\sqrt[\mu]{f(x)}=y$ όπου μ είναι το Ε.Κ.Π. των κ,λ.

viii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$

ix. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}+3\sqrt[3]{x-2}-4}{\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[6]{x-2}}$

x. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt[3]{x^2-x+6}}{x-2}$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

2Α) Το όριο μιας συνάρτησης υπάρχει αν και μόνο αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι ίσα, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \quad l\in\Re$ αν και μόνο αν : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$. Αν τα πλευρικά όρια μιας συνάρτησης είναι διαφορετικά, δηλαδή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, τότε λέμε ότι δεν υπάρχει το όριο της f στο x_0 .

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

17)(Άσκηση 5 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρεθεί (αν υπάρχει), το όριο της $f(x)$ στο x_0 αν :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ 5x, x>1\end{cases}$ και $x_0=1$ ii. $f(x)=\begin{cases} -2x, x<-1 \\ x^2+1, x\ge -1\end{cases}$ και $x_0=-1$

<u>Λύση :</u>

i. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 5x=5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ και άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+1)=2$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(-2x)=2$. Άρα $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=2$, άρα υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ και μάλιστα $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

18) Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda^2+8$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=5\lambda+2$, να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο x_0 .

19) Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\Re$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

20) Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-9}{x-5}, x\le 1\\ \sqrt{x^2+x+2}, x>1\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x^3-9x}, x>3\\ \dfrac{x^2-3x}{x^3-9x}, 0<x<3\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

iii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}, -1<x<\sqrt{2}\\ x-1, \sqrt{2}<x<2\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

iv. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, x<2\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}, x>2\end{cases}$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

3Β) ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21)(Άσκηση 9 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta, x\le 3\\ \alpha x+3\beta, x>3\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Λύση :

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=10$

Έχω : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}(\alpha x+3\beta)=10 \Leftrightarrow 3\alpha+3\beta=10$ (1)

Επίσης : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}(2\alpha x+\beta)=10 \Leftrightarrow 6\alpha+\beta=10$ (2)

Τις (1) και (2) $\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 10 \cdot (-2) \\ 6\alpha + \beta = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\alpha - 6\beta = -20 \\ 6\alpha + \beta = 10 \end{cases}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχω : $-5\beta = -10 \Leftrightarrow \beta = 2$ και αντικαθιστώντας στην 1^{η} $3\alpha + 6 = 10 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

22)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^3 - x + a - 1, x \geq 2 \\ (a+1)x - 1, x < 2 \end{cases}$ όπου α πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το α ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \to 2} f(x)$.

23)Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, x \leq 1 \\ 3x + 1, 1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2, x \geq 2 \end{cases}$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα α,β ώστε να υπάρχουν συγχρόνως τα $\lim_{x \to 1} f(x)$ και $\lim_{x \to 2} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΜΟΡΦΗ $\left(\frac{0}{0}\right)$ ΚΑΙ ΠΡΟΣΗΜΟ ΟΡΙΟΥ (ΟΡΙΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ)

Σε αυτή τη μεθοδολογία βρίσκει εφαρμογή το Θεώρημα 2^{ο} που λέει ότι :

- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Έστω ότι το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ οδηγεί σε μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και περιέχει όρους της μορφής $|g(x)|$.

- Αν το $\lim_{x \to x_0} g(x)$ είναι θετικό ή αρνητικό, τότε θεωρούμε αντίστοιχα g(x)>0 ή g(x)<0 κοντά στο x_0 και απαλλασσόμαστε από την παρουσία των απολύτων.
- Αν $\lim_{x \to x_0} g(x)$=0, τότε με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων βρίσκουμε το πρόσημο της g(x) και εργαζόμαστε με πλευρικά όρια.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

24)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x \to 3} \frac{2|x-1| - 3|x-5| + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}}$

ii. $\lim_{x \to 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1} - 1}$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-1|-3|x-5|+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}$ Έχω :

$\lim\limits_{x\to 3}(x-1)=2>0$ άρα το $x-1>0$ όταν το $x\to 3$

$\lim\limits_{x\to 3}(x-5)=-2<0$ άρα το $x-5<0$ όταν το $x\to 3$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2|x-1|-3|x-5|+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-1)+3(x-5)+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-2+3x-15+2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(5x-15)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{(\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{x-1-5+x}=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{2x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{2(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})}{2}=5\sqrt{2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1}-1}$ Έχω :

$\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$ άρα :

x	-∞	4	
$x-4$	-	0	+

- Αν $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$ δηλ. όταν $x\to 4^+$ τότε :

  $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-4+1}-1}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}{x-4}=2$

- Αν $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$ δηλ. όταν $x\to 4^-$ τότε :

  $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{-(x-4)}{\sqrt{-(x-4)+1}-1}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{4-x}{\sqrt{4-x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(4-x)(\sqrt{5-x}+1)}{(\sqrt{5-x}-1)(\sqrt{5-x}+1)}=$

  $=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(4-x)(\sqrt{5-x}+1)}{4-x}=2$. Άρα αφού τα πλευρικά όρια είναι ισα

  τότε : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|+1}-1}=2$

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}$ Έχω :

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)=0$

Έχω $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1, ή, x=2$ επίσης $x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0, ή, x=1$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x^2-3x+2	+		+	0	-	0	+
x^2-x	+	0	-	1	+		+

- Αν $x>1$ δηλ. όταν $x\to 1^+$ τότε :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+3x-2+x-1}{x^2-x+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+4x-3}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=1$$

- Αν $x<1$ δηλ. όταν $x\to 1^-$ τότε :

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2+x-1}{-(x^2-x)+x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{-x^2+x+x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{-x^2+2x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)^2}{-(x-1)^2}=-1$$

Άρα αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-3x+2|+x-1}{|x^2-x|+x-1}$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

25)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x+2|+|x+3|-8}{|x^2+x|-x-1}$

ii. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-3|-|x-1|}{x^2-2x}$

26)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|+x^2-4}{|x-5|-3}$

ii. $\lim_{x\to 3}\frac{|x^2-9|+|x-3|}{|x+2|-5}$

iii. $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|+x^2-x}{|x^2+2x-3|-x+1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΙΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5Α) Όταν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής : θέτουμε με $g(x)$ την παράσταση του ορίου που γνωρίζουμε, λύνουμε ως προς $f(x)$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27)(Άσκηση 4 σελ. 176 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\left(4f(x)+2-4x\right)=-10$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$

Λύση :

i. Έστω $4f(x)+2-4x=g(x)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-10$

Θα λύσω ως προς $f(x)$: $4f(x)+2-4x=g(x)\Leftrightarrow 4f(x)=g(x)+4x-2\Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{g(x)+4x-2}{4}$, κοντά στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)+4x-2}{4}=\dfrac{-10+4-2}{4}=-2$

ii. Έστω $\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=1$

Θα λύσω ως προς $f(x)$: $\dfrac{f(x)}{x-1}=h(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f(x)=(x-1)h(x)$, κοντά στο 1,

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left((x-1)h(x)\right)=(1-1)\cdot 1=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

28)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)-x^2+x-5\right)=7$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

29)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)f(x)-x^2+1}{1-\sqrt{x}}=10$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

30)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{x^2-5x+6}=5$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2x}{x-2}$.

31)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+x^2-x+2\right)=3$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}=2$.

32)Αν $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)f(x)=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x^2-3x+2}=4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)g(x)\right)$.

33)Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=5$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf^2(x)-2x+2}{x^2-1}=-1$.

34)Αν $f:\Re \to \Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}[xf(x)+x^2-8]=6$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-5f(x)}{\sqrt{f(x)-1}-2}$

35)Αν $f:\Re \to \Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x-5}{x^2-4}=2$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}$ iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-3}{x^2-6x+8}$

36)Αν $f:\Re \to \Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2}=4$, να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-2f(x)-xf(x)+2x}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}$

5Β) ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

37)Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+\beta}{x-1}=4$

38)Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+2x}=3$

39)Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-(\beta+3)x+2a+\beta}{x^2-4x+3}=2$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h . Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

Σε περιπτώσεις που η εύρεση του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν ανάγεται σε καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις (π,χ, δεν γνωρίζουμε τον τύπο της ή έχουμε ανισωτικές σχέσεις) τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής. Ιδιαίτερα η ύπαρξη διπλής ανισότητας της μορφής $\underline{\mathrm{A}(x) \le \mathrm{B}(x) \le \Gamma(x)}$ είναι χαρακτηριστική για εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής. Επίσης η ανισότητα της μορφής : $\underline{|\mathrm{A}(x)| \le \mathrm{B}(x)}$ γράφεται : $\underline{-\mathrm{B}(x) \le \mathrm{A}(x) \le \mathrm{B}(x)}$ οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε κριτήριο παρεμβολής

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $4x^2 + 6x - 2 \le f(x) - 3 \le 5x^2 + 2x + 2$, $x_0 = 2$

ii. $2x^3 - 8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$, $x_0 = 2$

Λύση :

i. $4x^2 + 6x - 2 \le f(x) - 3 \le 5x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x + 1 \le f(x) \le 5x^2 + 2x + 5$

Είναι : $\lim_{x\to 2}(4x^2 + 6x + 1) = 29$ και $\lim_{x\to 2}(5x^2 + 2x + 5) = 29$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής (κ.π.) $\lim_{x\to 2} f(x) = 29$

ii. $2x^3 - 8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8$

Για να απομονώσω στη μέση την $f(x)$ και να εφαρμόσω κ.π., πρέπει να διαιρέσω κάθε μέλος με το $x-2$. Διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ δηλ. όταν $x \to 2^+$ τότε :

$$2x^3 - 8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 8x}{x-2} \le f(x) \le \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^3 - 8x}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x(x-2)(x+2)}{x-2} = 16$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(3x^2+4)}{x-2} = 16$$ Άρα από κ.π. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 16$ (1)

- Αν $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ δηλ. όταν $x \to 2^-$ τότε :

$$2x^3 - 8x \le (x-2)f(x) \le 3x^3 - 6x^2 + 4x - 8 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 8x}{x-2} \ge f(x) \ge \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x-2} \le f(x) \le \frac{2x^3 - 8x}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 8}{x-2} = \lim_{x\to 2^=} \frac{(x-2)(3x^2+4)}{x-2} = 16$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^3 - 8x}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x(x-2)(x+2)}{x-2} = 16$$

Άρα από κ.π. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 16$ (2). Από (1) και (2) $\lim_{x\to 2} f(x) = 16$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

41)Αν $|f(x)-3x+5| \le x^2$ για κάθε $x \ne 0$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

42)Αν $2-|x-1| \le f(x)-2x \le x^2-2x+3$ για κάθε $x \in \Re$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

43)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $x-x^2 \le f(x) \le x$. Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

44)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει :
$4x^2-13 \le (x-2)f(x)+3 \le x^4-4x^2+3$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

45)Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ αν : $2x^2+7x+2 \le \dfrac{f(x)-8}{f(x)+2} \le 3x^2+5x+3$, $x_0=1$

46)Αν για κάθε $x>0$ ισχύει ότι : $4\sqrt{x} \le f(x) \le x+4$ να βρεθούν :

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)-8}{x-4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)-8}{\sqrt{x+5}-3}$

iv. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f^2(x)-64}{x-4}$ v. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{f(x)+1}-3}{x-4}$ vi. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|f(x)-5|-3}{x^2-5x+4}$

47)Έστω $f:\Re \to \Re$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+1=x$, για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

48)Δίνονται 2 συναρτήσεις $f,g:\Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}[f^2(x)+g^2(x)]=0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

49)Δίνονται 2 συναρτήσεις $f,g:\Re \to \Re$ για τις οποίες ισχύουν : $\lim\limits_{x\to x_0}[5f(x)+2g(x)]=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=0$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΑΝΙΣΟΤΙΚΗ ΣΧΕΣΗ

1η Περίπτωση :
Σε αυτήν την κατηγορία ασκήσεων, βρίσκει εφαρμογή το Θεώρημα 3ο που λέει ότι :

- Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
  (Σχόλιο : το παραπάνω Θεώρημα ισχύει και όταν $f(x) < g(x)$)

2η Περίπτωση :
Σε αυτή την περίπτωση ασκήσεων συναντάμε ανισοτικές σχέσεις με $f^2(x)$ και $f(x)$, όπου εργαζόμαστε με συμπλήρωση τετραγώνου και στη συνέχεια με κριτήριο παρεμβολής.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1η Περίπτωση

50)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ ισχύει : $xf(x)+3f(x) \leq x^2+x-6$ για κάθε $x\in\Re$ και το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

Λύση :
Το $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός άρα :

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3} f(x) = l \in \Re$$

Για κάθε $x\in\Re$ ισχύει : $xf(x)+3f(x) \leq x^2+x-6 \Leftrightarrow f(x)(x+3) \leq x^2+x-6$

- Αν $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ τότε $f(x)(x+3) \leq x^2+x-6 \Leftrightarrow f(x) \leq \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) \leq \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} \Leftrightarrow l \leq \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow l \leq -5$ (1)

- Αν $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3$ τότε $f(x)(x+3) \leq x^2+x-6 \Leftrightarrow f(x) \geq \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$

  Άρα $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \geq \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} \Leftrightarrow l \geq \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x+3} \Leftrightarrow l \geq -5$ (2)

  Από (1) και (2) προκύπτει ότι $l=-5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -3} f(x) = -5$.

2η Περίπτωση

51)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ ισχύει : $f^2(x)-4f(x)+4\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Λύση :
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε : $f^2(x)-4f(x)+4\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4 \leq 4-4\sigma\upsilon\nu^2 x$

$\Leftrightarrow \left(f(x)-2\right)^2 \leq 4\eta\mu^2 x \Leftrightarrow \left|f(x)-2\right| \leq 2\left|\eta\mu x\right| \Leftrightarrow -2\left|\eta\mu x\right| \leq f(x)-2 \leq 2\left|\eta\mu x\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2-2\left|\eta\mu x\right| \leq f(x) \leq 2\left|\eta\mu x\right|+2$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2-2\left|\eta\mu x\right|\right)=2$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(2\left|\eta\mu x\right|+2\right)=2$, άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

52)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει $xf(x)-2f(x)\le x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\Re$ και το $\lim_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

53)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει : $xf(x)-f(x)\le x^2+2x-3$, για κάθε $x\in\Re$ και το $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$.

54)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει : $f^2(x)+4f(x)+4\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$.

55)Αν για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ ισχύει : $f^2(x)\le 6xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ – ΟΡΙΟ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

8Α (ΒΑΣΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ)

Για την εύρεση τριγωνομετρικών ορίων χρησιμοποιούμε τα εξής βασικά όρια :

- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}=1 (\alpha\neq 0)$ ή ακόμα $\lim_{\phi(x)\to 0}\frac{\eta\mu\phi(x)}{\phi(x)}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x-1}{\alpha x}=0\ (\alpha\neq 0)$ ή ακόμα $\lim_{\phi(x)\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\phi(x)-1}{\phi(x)}=0$

Η τεχνική εύρεσης είναι ίδια με αυτή που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

56)(Άσκηση 6 σελ. 175 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\phi x}{x}$ iii. $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\phi 4x}{\eta\mu 2x}$ iv. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x}\right)$ v. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)$

vi. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$

<u>Λύση :</u>

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}3\frac{\eta\mu 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}$ θέτω $u=3x$, όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ άρα

$3\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}\overset{u=3x}{==}3\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3\cdot 1=3$

ii. $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\phi x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

iii. $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu 4x}}{\eta\mu 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{4x\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{2x\frac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}=$

$=\frac{4x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}==2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}\overset{*}{=}2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=2$

* θέτω $u=4x$, όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{4x}\overset{u=4x}{==}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

θέτω $v=2x$, όταν $x\to 0$ τότε $v\to 0$ άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}\overset{v=2x}{==}\lim_{v\to 0}\frac{\eta\mu v}{v}=1$

iv. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\eta\mu x}{x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1-1=0$

v. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x(x^2+1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x^2+1}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

vi. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-4}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot(\sqrt{5x+4}+2)\overset{*}{=}1\cdot\sqrt{4}+2=4$

* θέτω $u=5x$, όταν $x\to 0$ τότε $u\to 0$ άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}\overset{u=5x}{==}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

57)Να υπολογιστούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2-x}$

ii. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x-2\eta\mu x}{x^2+x}$

iii. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^2-x}$

iv. $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$

v. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x^2+x}$

vi. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{x+1}-1}$

vii. $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{x^2+x+4}-2}$

58)Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathrm{A} \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 2$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(3x) - f(-x)\eta\mu 2x}{3x^2 - \eta\mu^2 x}$

59)Αν $f : \Re \to \Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 3$, να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(2x) + x\eta\mu 2x}{x^2 + \eta\mu^2 x + xf(-x)}$.

60)Αν $f : \Re \to \Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(5x) - \eta\mu x}{6x - \eta\mu 3x}$

61)Αν $f : \Re \to \Re$ συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) + \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x) + \sqrt{x+1} - 1}{\eta\mu 5x}$.

62)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(x+4) = f(x)$ για κάθε $x \in \Re$, και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x) - 3}{x - 3} = 5$. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x) - 3}{\sqrt{x+5} - 2}$.

63)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) + \eta\mu 5x}{x^2 + 2x} = 4$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{f(\sigma\upsilon\nu x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu 3x + x - x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x^2+1} - 1}$

64)Δίνεται άρτια συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lambda$ με $\lambda \in \Re$ να βρεθούν τα όρια :

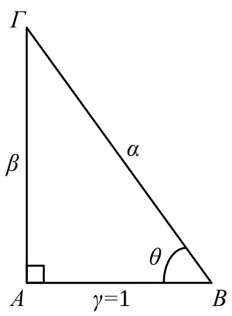
i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$ iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x) + \eta\mu f(x)}{x}$

65)Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{x + \eta\mu x} = 3$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x) + \eta\mu 3x}{x^2 - \eta\mu x}$

66)Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\gamma = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}(\alpha - \beta)$ ii. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}(\alpha^2 - \beta^2)$ iii. $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$



8Β (ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΕΠΙ ΦΡΑΓΜΕΝΗ)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $\alpha \le g(x) \le \beta$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=0$

Η απόδειξη προκύπτει από το κριτήριο παρεμβολής. Πράγματι, είναι :

$-\mathrm{M}|f(x)| \le f(x)g(x) \le \mathrm{M}|f(x)|$ Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει το ζητούμενο.

Συμπέρασμα : (μηδενική συνάρτηση)x(φραγμένη συνάρτηση)=μηδενική συνάρτηση

Χαρακτηριστικό της περίπτωσης «μηδενική επί φραγμένη» είναι η ύπαρξη στο όριο : ($\eta\mu\frac{1}{x}, \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ και γενικά $\eta\mu\frac{1}{g(x)}, \sigma\upsilon\nu\frac{1}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$)

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

67)Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)$

<u>Λύση :</u>

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

Έχω $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| = |x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x|$, άρα $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \xLeftrightarrow{|x|\le a \Leftrightarrow -a\le x\le a} -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)$

Παρατηρώ ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+2x\right)=0$ (μηδενική) και $-1 \le \sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2} \le 1$ (φραγμένη)

Άρα έχω όριο της μορφής «μηδενική επί φραγμένη»

$\left|(x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right| = \left|x^3+2x\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right| \le \left|x^3+2x\right|$, άρα

$\left|(x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right| \le \left|x^3+2x\right| \Leftrightarrow -\left|x^3+2x\right| \le (x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2} \le \left|x^3+2x\right|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|x^3+2x\right|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left|x^3+2x\right|=0$

άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^3+2x)\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)=0$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

68)Να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^5\eta\mu\frac{2}{x}\right)=0$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^4\sigma\upsilon\nu\frac{3}{x^2}\right)=0$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)=0$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+1+x^3\eta\mu\frac{3}{x}\right)=1$ v. $\lim\limits_{x\to 0}\left((x^2+x)\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$

69)Να υπολογιστούν τα όρια

i. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot \eta\mu\frac{1}{x^2}\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x - x}{x}\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1}-1}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right)$

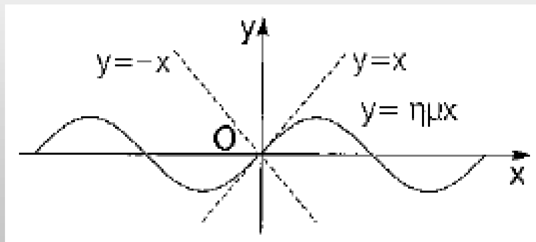
v. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu^2 x\cdot \eta\mu\frac{1}{x}}{x}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Η ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ $|\eta\mu x|\le |x|$

Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le |x|$ (1), για κάθε $x\in\Re$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι :

- $|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x=0$
- $\eta\mu x < x \Leftrightarrow x>0$
- $\eta\mu x > x \Leftrightarrow x<0$
- $\eta\mu x < -x \Leftrightarrow x<0$
- $\eta\mu x > -x \Leftrightarrow x>0$



Για $x\neq 0$ $(1)\Rightarrow \left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|<1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

70)Να βρείτε τα πεδία ορισμού : i. $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x - x}$ ii. $f(x)=\ln(x-\eta\mu x)$ iii. $f(x)=\sqrt{\eta\mu x + x}$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

71)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\eta\mu 5x}{x}=7$. Να βρείτε τα όρια : i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ iii. $\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+f(x)\eta\mu x+\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{xf(x)+\eta\mu^2 2x}$

72)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $2x\eta\mu x\le f(x)\le x^2+\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ iii. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x}$

73)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x\to 0} f(x)=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ και $\eta\mu x\cdot f(x)\le 2x+\eta\mu 3x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x\to 0} f(x)$.

74)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x\to 0} f(x)=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ και $x^3\cdot f(x)\le\eta\mu^2 3x\cdot\eta\mu x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)+\eta\mu 5x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu 5x}{x^2+\eta\mu^2 3x}$

75)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)-2f(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f(x)-1\right)}{f^2(x)-1}$

76)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lambda$ με $\lambda\in\Re$ και $f^3(x)-x\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x=4f^2(x)\cdot\eta\mu x-xf(x)\cdot\eta\mu 7x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+xf(x)}{x\eta\mu x+\eta\mu^2 x}$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x+1}\cdot\eta\mu x-\eta\mu x}$

77)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $x^2 f^2(x)-2xf(x)\cdot\eta\mu x\le x^4-\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\eta\mu x+\varepsilon\varphi x}{x^2+3x-\eta\mu 5x}$

78)Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $\eta\mu 2x-x^2\le f(x)\le x^2+\eta\mu 2x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ ii. $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-\eta\mu 5x}{f(x)+1-\sigma\upsilon\nu x}$

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

15 .Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_o .

Απάντηση :

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 , ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0 .

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

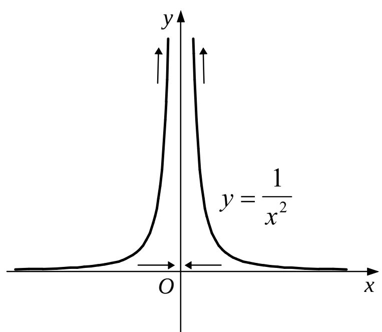
ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

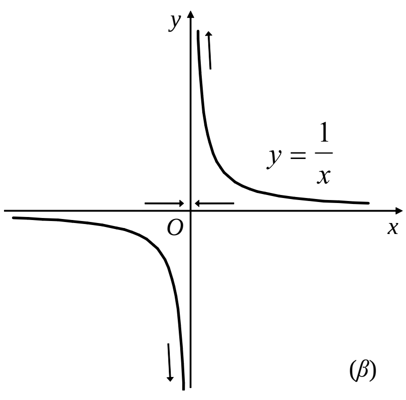
και $f(x)<0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

ζ)Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in N^*$ (σχήμα α)



(α)



(β)

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in N$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in N$

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και γενικά της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in N$. (σχήμα β)

16 . Να γράψετε τα Θεωρήματα του άπειρου ορίου στο x_o

Απάντηση :

Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in R$						
το όριο της f είναι:	$\alpha \in R$	$\alpha \in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in R$,										
το όριο της f είναι:	α>0	α<0	α>0	α<0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Πράξεις στο σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

(Με βάση τις ιδιότητες των απείρων ορίων, επεκτείνουμε τις πράξεις του $\Re$ *στο σύνολο* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$*)*

- $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ και $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
- $(+\infty)+\alpha=+\infty$ και $(-\infty)+\alpha=-\infty$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ και $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$ και $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$
- $\alpha\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \ \alpha>0\\ -\infty, & \alpha\nu\ \ \alpha<0\end{cases}$ και $\alpha\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, & \alpha\nu\ \ \alpha>0\\ +\infty, & \alpha\nu\ \ \alpha<0\end{cases}$
- $\dfrac{\alpha}{\pm\infty}=0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι :
$(+\infty)+(-\infty)$ και $0\cdot(\pm\infty)$.

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι : $(+\infty)+(-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Για παράδειγμα :

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ και } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$ ***(2018 Β΄)***

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις άλλες μορφές.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1</u> : ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Με το συμβολισμό $\dfrac{\alpha}{0}$ εννοούμε ότι έχουμε όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$, $\alpha\in\Re$. Για να υπολογίσουμε ένα τέτοιο όριο εργαζόμαστε ως εξής :

1) παραγοντοποιώ τον παρανομαστή και απομονώνω τον παράγοντα που τον μηδενίζει δηλ. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{(x-x_0)^{\nu}}\cdot\text{"}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\varepsilon\upsilon\mu\alpha\text{"}\right)$ (1)

2) υπολογίζω το όριο του περισσεύματος

3) υπολογίζω το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{(x-x_0)^{\nu}}\right)$

α) αν $(x-x_0)^{\nu}>0$ κοντά στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{(x-x_0)^{\nu}}\right)=+\infty$

β) αν $(x-x_0)^{\nu}<0$ κοντά στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{(x-x_0)^{\nu}}\right)=-\infty$

γ) αν $(x-x_0)^{\nu}$ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων και διαπιστώνουμε ότι το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{(x-x_0)^{\nu}}\right)$ δεν υπάρχει, αφού τα πλευρικά θα είναι το ένα $+\infty$ και το άλλο $-\infty$.

4) Υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ από την (1) εκτελώντας τις πράξεις.

Συμπέρασμα : όριο της μορφής $\dfrac{\alpha}{0}$ είναι είτε $+\infty$, είτε $-\infty$, είτε δεν υπάρχει.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 σελ. 180 σχολικό βιβλίο)

Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right)$ έχω :

$\lim\limits_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right)=+\infty\cdot 2=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}\overset{\frac{-4}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right)$ έχω :

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2>0$ κοντά στο $x_0=2$, άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}(-3x+2)=-4$. Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right)=+\infty(-4)=-\infty$

2) (ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 σελ. 181 σχολικό βιβλίο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

Λύση : $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-2}\overset{\frac{3}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)$

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ αλλά το $x-2$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=2$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ τότε $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3$

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)=+\infty\cdot 3=+\infty$

- Αν $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ τότε $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$

  άρα $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right)=-\infty\cdot 3=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$

  Άρα το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ δεν υπάρχει.

3) Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{16-x^2}$

Λύση :

$$\lim_{x\to 4}\frac{x+2}{16-x^2}\overset{\frac{6}{0}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{x+2}{(4-x)(4+x)}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{4-x}\cdot\frac{x+2}{4+x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to 4}(4-x)=0$ αλλά το $4-x$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=4$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $4-x>0\Leftrightarrow x<4$ τότε $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{4-x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x+2}{4+x}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

  άρα $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{1}{4-x}\cdot\dfrac{x+2}{4+x}\right)=+\infty\cdot\dfrac{3}{4}=+\infty$

- Αν $4-x<0\Leftrightarrow x>4$ τότε $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{4-x}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x+2}{4+x}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

  άρα $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\dfrac{1}{4-x}\cdot\dfrac{x+2}{4+x}\right)=-\infty\cdot\dfrac{3}{4}=-\infty$

  Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα άρα το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+2}{16-x^2}$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

4) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x}{(x-4)^4}$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{(x-2)^2}$ (Απ. $+\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2\cdot(x+3)}$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|-3}{|x-2|}$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+4}{x^2+6x+9}$ (Απ. $+\infty$)

vi. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{x^3-2x^2+x}$

vii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{x\eta\mu x}$

viii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+2}{|\eta\mu x|-|x|}$

ix. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x-1}{x-\eta\mu x}$

x. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{x^2-\eta\mu^2 x}$

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (Απ. $+\infty$)

6) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-2x-3}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$. (Απ. Δεν υπάρχει)

7) Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

i. $f(x)=\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$

ii. $f(x)=\dfrac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

iii. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

8) Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0, όταν :

i. $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$

ii. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0=0$

iii. $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0=0$.

9) Να βρεθούν αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x-3}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{x^2-4}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ (Απ. Δεν υπάρχει)

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-3}{1-\sigma\upsilon\nu x}$

v. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$

vi. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-1}{\eta\mu x}$

vii. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x+10}{x^2+2x-3}\right)$

10) Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$.

11) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\dfrac{\pi}{2}$.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\frac{\alpha}{0}$

Ζητείται πλήρης διερεύνηση για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων. Όπως και στα μη παραμετρικά παραγοντοποιώ τον παρανομαστή και απομονώνω τον παράγοντα που τον μηδενίζει δηλ. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{(x-x_0)^\nu}\cdot\text{"}\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\varepsilon\upsilon\mu\alpha\text{"}\right)$ και υπολογίζω το όριο για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x^3+2x^2+x}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$. (Διερεύνηση)

Λύση :

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x^3+2x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x(x^2+2x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)$$

Έχω $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-\lambda}{x}=\frac{-2-\lambda}{-1}=\lambda+2$, πρέπει να ξέρω το πρόσημο του «περισσεύματος» καθώς θα επηρεάσει το τελικό όριο, γι' αυτό διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $\lambda+2>0\Leftrightarrow\lambda>-2$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)=+\infty$
- Αν $\lambda+2<0\Leftrightarrow\lambda<-2$, $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\frac{2x-\lambda}{x}\right)=-\infty$
- Αν $\lambda+2=0\Leftrightarrow\lambda=-2$, τότε $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+2}{x^3+2x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\frac{2(x+1)}{x(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{2}{x(x+1)}\overset{\frac{2}{0}}{=}\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{2}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$ αλλά το $x+1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=-1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$ τότε $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)=+\infty\cdot(-2)=-\infty$
- Αν $x+1<0\Leftrightarrow x<-1$ τότε $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)=-\infty\cdot(-2)=+\infty$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x}\right)$ δεν υπάρχει.

13) (Άσκηση 3 σελ. 182 σχολικό βιβλίο Β΄ Ομάδας)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε να υπάρχει στο $\Re$ το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

Λύση :

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x+1}\right)$$

Έχω $\lim_{x\to1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x+1}=\frac{\lambda-2}{2}$, πρέπει να ξέρω το πρόσημο του «περισσεύματος» καθώς θα επηρεάσει το τελικό όριο, για αυτό διακρίνω περιπτώσεις :

- Αν $\frac{\lambda-2}{2}>0\Leftrightarrow\lambda-2>0\Leftrightarrow\lambda>2$, τότε : $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ αλλά το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :
  - Αν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, άρα $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$
  - Αν $x-1<0\Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, άρα $\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim_{x\to1}f(x)$ δεν υπάρχει.

- Αν $\frac{\lambda-2}{2}<0\Leftrightarrow\lambda-2<0\Leftrightarrow\lambda<2$, τότε : $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ αλλά το $x-1$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο $x_0=1$, οπότε πρέπει να διακρίνω περιπτώσεις :
  - Αν $x-1>0\Leftrightarrow x>1$ τότε $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, άρα $\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$
  - Αν $x-1<0\Leftrightarrow x<1$ τότε $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$, άρα $\lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

Παρατηρούμε ότι τα πλευρικά όρια δεν είναι ισα άρα το $\lim_{x\to1}f(x)$ δεν υπάρχει.

- Αν $\frac{\lambda-2}{2}=0\Leftrightarrow\lambda=2$ τότε $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}\in\Re$

Άρα το $\lim_{x\to1}f(x)$ υπάρχει στο $\Re$ μόνο αν $\lambda=2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

14) Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x\to2}\frac{x^2-x+\lambda}{|x-2|}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

ii. $\lim_{x\to1}\frac{\lambda x^2+x-3}{x-1}$

iii. $\lim_{x\to1}\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$

iv. $\lim_{x\to1}\frac{\lambda x^2+\mu x-3}{x-1}$

15) Αν $\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+\alpha x+1}=+\infty$, να βρεθεί το α .

16) Αν $\lim_{x\to3}\frac{x-5}{x^2+\alpha x-\alpha+3}=-\infty$, να βρεθεί το α .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Όταν γνωρίζουμε το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να βρούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, τότε εργαζόμαστε ως εξής : θέτουμε με $g(x)$ την παράσταση του ορίου που γνωρίζουμε, λύνουμε ως προς $f(x)$ και υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17) (Άσκηση 4 σελ. 182 σχολικό βιβλίο Β΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν :

i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$

Λύση :

i. Έστω $g(x)=\dfrac{x-4}{f(x)}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$, έχω $g(x)=\dfrac{x-4}{f(x)} \Leftrightarrow g(x)f(x)=x-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x-4}{g(x)}$, κοντά στο 1, ($g(x)\neq 0$ κοντά στο $x_0=1$ αφού $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$)

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{g(x)}=\dfrac{-3}{+\infty}=0$

ii. Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+2}$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=-\infty$, έχω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x+2} \Leftrightarrow f(x)=h(x)(x+2)$, κοντά στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[h(x)(x+2)]=-\infty\cdot 3=-\infty$

iii. Έστω $\phi(x)=f(x)(3x^2-2)$, άρα $\lim\limits_{x\to 1}\phi(x)=+\infty$

$\phi(x)=f(x)(3x^2-2) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\phi(x)}{3x^2-2}$, κοντά στο 1, $(3x^2-2\neq 0$ κοντά στο $x_0=1)$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\phi(x)}{3x^2-2}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

18) Έστω συνάρτηση $f(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot \eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. (Απ. $-\infty$)

19) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 f(x)\right]=-3$ να βρείτε τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{f(x)}$ iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{f(x)\eta\mu^2 x}$

20) **Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^2-2x+1)f(x)\right]=-3$ να βρείτε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f^2(x)-3f(x)-5}{f^2(x)+f(x)-4}$ (Απ. 2)

iii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-2f(x)+3}{f^2(x)-3f(x)-1}$ (Απ. $-\infty$) iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+4}{f^3(x)-2f^2(x)+1}$ (Απ. 0)

21) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x^2-6x+9)f(x)\right]=5$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6f^2(x)-7f(x)+8}{3f^2(x)+f(x)-1}$

22) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3f(x)}{\sqrt{x+4}-2}=-3$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^3(x)-5f(x)+3}{f^3(x)+2f^2(x)-7}$

23) Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-5}{f(x)-2}=+\infty$ να βρείτε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)-2\right)}{f^2(x)-4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-4}{f^2(x)-4f(x)+4}$

24) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|3-xf(x)|-|2f(x)-3|}$. (**υποδ.** αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0) (Απ. 0)

25) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$ να βρείτε αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)+x|-|x-4|}{f^2(x)+3f(x)-5}$. (Απ. 0)

26) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2f(x)}{x-3}=+\infty$.Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to 1}\left[f^2(x)+3f(x)\right]$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|f^2(x)+5f(x)|+f^2(x)-2}{f^2(x)-3f(x)+1}$ (Απ. 2) iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{f(x)}$ (Απ. 0) v. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $f(x) \le g(x)$

- Αν ισχύει $f(x) \ge g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

Αποδ.
Είναι $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, άρα κοντά στο x_0 ισχύει ότι $g(x) > 0$. Από τη σχέση $f(x) \ge g(x)$ προκύπτει ότι ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0. Έτσι κοντά στο x_0 έχουμε : $f(x) \ge g(x) \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{g(x)}$. Όμως $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Άρα είναι : $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = +\infty$, διότι $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\frac{1}{f(x)} > 0$ κοντά στο x_0.

- Αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε ισχύει $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Αποδ. (Όμοια με παραπάνω)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

27) Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$. για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 4) f(x) \le x - 5$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Λύση :
Για x κοντά στο 2 έχουμε :

$$(x^2 - 4x + 4) f(x) \le x - 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 f(x) \le x - 5 \Leftrightarrow f(x) \le \frac{x-5}{(x-2)^2} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-5}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\left[(x-5)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\right] = -3\cdot(+\infty) = -\infty$$ καθώς :

- $\lim_{x\to 2}(x-5) = -3 < 0$
- $\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = 0$ και $(x-2)^2 > 0$ κοντά στο 2,

άρα από (1) προκύπτει ότι : $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

28) Αν $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(x) \le -\frac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

29) Αν $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(x) \ge \frac{1}{x}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

30) Αν $x^2 f(x) + 1 \le 0$, για κάθε $x \ne 0$, να βρείτε το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2+6x+9)f(x)\geq x+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x\to -3} f(x)$.

32) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x)\geq x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x\to 0} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim_{x\to 0}\left[(f(x)-2010)\cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]$ (Απ. 1)

33) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^4 f(x)\leq (x-2)\cdot \eta\mu x\cdot \eta\mu 3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

iii. $\lim_{x\to 0} f(x)$ (Απ. $-\infty$) ii. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{f^2(x)-3f(x)+7}$ (Απ. 0)

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

17. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση :

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

● $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in N^*$

● $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in N^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$

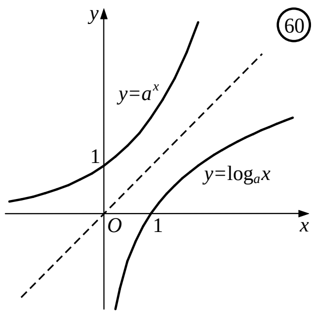
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$

δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι

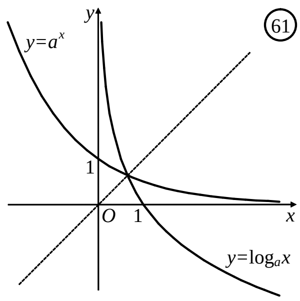
● Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to0} \log_\alpha x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$



● Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$
$$\lim_{x\to0} \log_\alpha x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$



Σχόλια

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.

● Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

● Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

18. Να δώσετε τον ορισμό της ακολουθίας.

Απάντηση :

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

19. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση :

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathrm{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ – ΡΗΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ Κρατάμε τους μεγιστοβάθμιους όρους.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) (Άσκηση 1 σελ. 186 σχ. βιβλίο Α΄Ομάδας)
Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-10x^3+2x-5\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3-2x+1\right)$ iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3+8}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$ v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}$ vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^{10}+x+3}$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{5}{x+2}\right)$ viii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-10x^3+2x-5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-10x^3\right)=-\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5x^3\right)=-\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x^3}=0$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3}{4x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^{10}+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^{10}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^9}=0$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{5}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x(x+2)}{(x^2+1)(x+2)}-\dfrac{5(x^2+1)}{(x+2)(x^2+1)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-5x^2-5}{(x^2+1)(x+2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^2+2x-5}{x^3+2x^2+x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x^2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4}{x}\right)=0$

viii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{(x^2+5)(x+2)-x(x^2+3)}{x(x+2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3+2x^2+5x+10-x^3-3x}{x^2+2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+2x+10}{x^2+2x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right)=2$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

2) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+2x^2+x-5\right)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3+x^2-3x+2\right)$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5+3x^2-5x+10\right)$ (Απ. $+\infty$) iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\eta\mu\theta-2)x^5+3x^2-2019\right)$

3) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+6}{x^2+2x+5}$ (Απ. 3)

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+x-3}{x^6+x^4+x^2+1}$ (Απ. 0)

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{-2x^3+x-1}$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^6+x^5+3x+2}{x^4-5x+6}$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{2x+1}{x^3+1}\right)$ (Απ. 0)

vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(|\alpha|-|\eta\mu\alpha|\right)x^5+3x^2-2}{x^3-2x+1}$ (Απ. $+\infty$)

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2</u> : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΑΡΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α) Για να υπολογίσουμε όρια που περιέχουν παραστάσεις της μορφής : $\sqrt[\nu]{f(x)}\pm g(x)$ ή $\sqrt[\nu]{f(x)}\pm\sqrt[\kappa]{g(x)}$ εργαζόμαστε ως εξής :

1) Σε κάθε υπόριζο βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του x

2) Χωρίζουμε τις ρίζες και εμφανίζεται : $\sqrt[\nu]{x^\nu}=|x|=\begin{cases}x, & x\to+\infty\\ -x, & x\to-\infty\end{cases}$

3) Βγάζουμε κοινό παράγοντα το x.

(Αν κατά τη διαδικασία εμφανιστεί απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(\pm\infty)$, τότε στο αρχικό όριο πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση.)

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

4) (Ασκήσεις 2,3 σελ. 187 σχ. βιβλίο Α΄Ομάδας)
Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}\overset{\substack{x>0\\ \alpha\varphi\acute{o}\acute{\upsilon}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}\overset{\substack{x<0\\ \alpha\varphi\acute{o}\acute{\upsilon}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\sqrt{\left(1+\dfrac{10}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}=+\infty$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}\overset{\substack{x>0\\ \alpha\varphi\acute{o}\acute{\upsilon}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=1$

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}\overset{\substack{x<0\\ \alpha\varphi\acute{o}\acute{\upsilon}\\ x\to-\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=-1$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+|x|\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)\overset{\substack{x>0\\ \alpha\varphi\acute{o}\acute{\upsilon}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+x\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}\right)=+\infty$

vi. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι’αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}\overset{\substack{x>0\\ \alpha\phi\acute{o}\\ x\to+\infty}}{====}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

vii. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι’αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}==\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}\overset{\substack{x<0\\ \alpha\phi\acute{o}\\ x\to-\infty}}{====}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

viii. Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι’αυτό πολλαπλασιάζω αριθμητή και παρανομαστή με τη συζυγή παράσταση:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{[(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+3}][(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+3}]}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^2-\sqrt{4x^2-4x+3}^{\,2}}{2x-1+\sqrt{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x+1-4x^2+4x-3}{2x-1+|x|\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}\overset{\substack{x>0\\ \alpha\phi\acute{o}\\ x\to+\infty}}{====}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{2x-1+x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=0$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

5) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+5}+x\right)$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-3x\right)$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+5}+x+5\right)$ (Απ. $+\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x+7\right)$ (Απ. $+\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+7}-x+2\right)$ (Απ. 3)

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+10}-\sqrt{x^2+2x+3}\right)$ (Απ. 2)

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x)$, $\alpha\neq\beta$

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$

ix. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

x. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$

6) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και για κάθε x>0 ισχύει :
$1+\sqrt{x^2+2x+3}\geq f(x)+x\geq\sqrt{x^2+4x+6}$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Απ. 2)

7) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\sqrt{9x^2+1}$, να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$

8) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+x+1}{x+2}$ (Απ. 2)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+x+7}}{x+3}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+3}+3x+2}{\sqrt{x^2+x+1}+4x+3}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+5x}{\sqrt{x^2+2x+3}+2x}$

2Β) ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΡΙΖΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}+\sqrt{4x^2-1}-6x\right)$

Λύση :

Διαπιστώνω την αναμενόμενη απροσδιοριστία, γι'αυτό χωρίζω κατάλληλα την παράσταση και πολλαπλασιάζω αριθμητές και παρανομαστές με τη συζυγή παράσταση:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}+\sqrt{4x^2-1}-6x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}-4x+\sqrt{4x^2-1}-2x\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+8x}-4x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{16x^2+8x}-4x)(\sqrt{16x^2+8x}+4x)}{\sqrt{16x^2+8x}+4x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-1}-2x)(\sqrt{4x^2-1}+2x)}{\sqrt{4x^2-1}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{|x|\sqrt{16+\frac{8}{x}}+4x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2x}\overset{\substack{x>0\\ \alpha\phi\acute{o}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x\sqrt{16+\frac{8}{x}}+4x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2x}\overset{\substack{x>0\\ \alpha\phi\acute{o}\\ x\to+\infty}}{=\!=\!=\!=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x\left(\sqrt{16+\frac{8}{x}}+4\right)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}+2\right)}=\frac{8}{4+4}+0=1$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

10)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+\sqrt{9x^2+3x+7}-5x\right)$

ii. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-2\sqrt{x^2+1}-x\right)$

iii. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+5}+\sqrt{9x^2+x+1}-\sqrt{16x^2+1}\right)$

iv. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-5}+\sqrt{4x^2-x}-\sqrt{9x^2+1}\right)$

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

Αν μέσα στο όριο υπάρχει $|g(x)|$ τότε υπολογίζω ξεχωριστά το $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)$. Αν $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=+\infty$ τότε και $g(x)>0$ όταν $x\to\pm\infty$, ενώ αν $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=-\infty$ τότε και $g(x)<0$ όταν $x\to\pm\infty$. Οπότε απαλλάσσομαι από τα απόλυτα και υπολογίζω κανονικά το όριο.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

11)(Άσκηση 4 σελ. 187 σχ. βιβλίο Β΄Ομάδας)
Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$

iii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2-x|}{x-1}$

<u>Λύση :</u>

i. $\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$, άρα $x^2-5x>0$ όταν $x\to-\infty$ άρα,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$, άρα $x^2-x>0$ όταν $\to+\infty$ άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^2-x|}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

12)Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{|x^2-5x+13|-7x^2}{|x^3-3x^2+5|-x^3}$ (Απ. 2) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{|x^4+6x^3-5x+6|-x^4}{|4x^3+2x^2-3x|+x^3}$ (Απ. - 2)

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$

13)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{|2x^3+3x^2-3x+5|-|x^2-7x-13|}{|x^3+x-5|+|7-x|}$. Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. 2) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (Απ. 2)

14)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\dfrac{|x-1|-|x-2|}{x-3}$. Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ (Απ. 0) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ (Απ. 0)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15)Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\mu-2)x^5-3x+2\right)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$ iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)$

Λύση :

i. Έστω $f(x)=(\mu-2)x^5-3x+2$, $x\in\Re$.

- Αν $\mu\neq2$ είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\mu-2)x^5=\left((\mu-2)\cdot(+\infty)\right)=\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \ \mu>2\\ -\infty, & \alpha\nu\ \ \mu<2\end{cases}$
- Αν $\mu=2$ είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x)=-\infty$

Τελικά : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)==\begin{cases}+\infty, & \alpha\nu\ \ \mu>2\\ -\infty, & \alpha\nu\ \ \mu\leq2\end{cases}$

ii. Έστω $f(x)=\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$ κοντά στο $+\infty$.

- Αν $\mu\neq 1$ και $\mu\neq 0$, τότε :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x}{\mu}=\dfrac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x$,

επειδή : $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, θα διακρίνω περιπτώσεις για το $\dfrac{\mu-1}{\mu}$

  - Αν $\dfrac{\mu-1}{\mu}>0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1)>0 \Leftrightarrow \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

    Γιατί : έχω $\mu(\mu-1)=0 \Leftrightarrow \mu=0, ή, \mu=1$

μ	- ∞	0		1	+ ∞
$\mu(\mu-1)$	+	0	-	0	+

    Επειδή θέλω $\mu(\mu-1)>0 \Leftrightarrow \mu\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

    Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\dfrac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

  - Αν $\dfrac{\mu-1}{\mu}<0 \Leftrightarrow \mu(\mu-1)<0 \Leftrightarrow \mu\in(0,1)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\dfrac{\mu-1}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=-\infty$

- Αν $\mu=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$

- Αν $\mu=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{-5x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{5}=+\infty$

iii. Έστω $f(x)=\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\mu x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+\mu x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\mu x\right)\overset{\substack{x<0\\ αφού\\ x\to-\infty}}{===}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\mu x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right)\right)$, επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$,

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right)=1-\mu$ θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το $1-\mu$

- Αν $1-\mu>0 \Leftrightarrow \mu<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right)\right)=+\infty$

- Αν $1-\mu<0 \Leftrightarrow \mu>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\mu\right)\right)=-\infty$

- Αν $1-\mu=0 \Leftrightarrow \mu=1$ τότε $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}==\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}\overset{\substack{x<0\\ \alpha\phi\acute{o}\\ x\to-\infty}}{====}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

16)Να υπολογίσετε τα όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων α, β .

i. $\lim_{x\to+\infty}\left((a-1)x^3+x^2+1\right)$

ii. $\lim_{x\to-\infty}\left((a^2-4)x^4+\beta x^3+x+2\right)$

iii. $\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-2)x^2+x-3}{(a+2)x^3+ax^2+x+5}$

iv. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+5}+ax-3\right)$

v. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}+ax+2\right)$

17) Αν $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-\alpha x+\beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

18)Αν $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}+ax+\beta$, να βρεθούν οι α,β ώστε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=11$ *(απ. $\alpha=-1,\ \beta=10$)*

19)Αν $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{9x^2+x}-\alpha x-\beta$, να βρεθούν οι α,β ώστε $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{5}{6}$

20)Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)$, να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

21)Αν $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\lambda x$, να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

22)Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\frac{(\lambda^2+\lambda-2)x^2+(\lambda-1)x+2}{(\lambda+5)x+7}$. Για τις διάφορες τιμές του λ να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν. Αν σε κάποιο όριο παρουσιάζονται οι όροι ημx και συνx , τότε διαιρούμε τους όρους αυτούς με κάποια θετική δύναμη του x , ώστε χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής να τους μηδενίσουμε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 : $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ ενώ :

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, ομοίως και $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ τα οποία αποδεικνύονται με κριτήριο παρεμβολής.

$$\left(\begin{array}{l}\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}\\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0\end{array}\right)$$ και

$$\left(\begin{array}{l}\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\frac{1}{|x|}\\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0\end{array}\right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 : Στην ενότητα 1.5 είδαμε ότι $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$ (Μηδενική επί φραγμένη που αποδεικνύεται ως εξής :

Έχω $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|$, άρα $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le|x|\overset{|x|\le a\Leftrightarrow-a\le x\le a}{<\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!>}-|x|\le x\eta\mu\frac{1}{x}\le|x|$

Εφαρμόζω κ.π. και $\lim_{x\to 0}(-|x|)=0$, $\lim_{x\to 0}|x|=0$ άρα από κ.π. $\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$)

- Όμως $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$ γιατί : $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\underset{\substack{\acute{o}\tau\alpha\nu\\ x\to\pm\infty\\ u\to 0}}{\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\\ u=\frac{1}{x}}}{=\!=\!=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3 : Αν έχω όριο όπου $x\to\pm\infty$, που περιέχει $\eta\mu x$ ή $\sigma\upsilon\nu x$, τότε διαιρώ κάθε όρο αριθμητή και παρανομαστή με τη μεγιστοβαθμια δύναμη του x. Αν χρειαστεί κάνω διαχωρισμό του κλάσματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\eta\mu x}{x+2}$ ii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu x}{3x+\sigma\upsilon\nu x}$ iii. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\sigma\upsilon\nu x+x^2\eta\mu x+2}{x^4+\eta\mu^4x+x}$

Λύση :

i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\eta\mu x}{x+2}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha\, x\neq 0}}{\underset{\div x}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{\eta\mu x}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\overset{*}{=}\frac{2+0}{1+0}=2\,,$$

$$*\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0\end{array}\right)$$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+\eta\mu^2x-2\sigma\upsilon\nu x}{3x+\sigma\upsilon\nu x}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha\, x\neq 0}}{\underset{\div x}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\dfrac{\eta\mu^2x}{x}-2\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}{3+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}}\overset{*}{=}\frac{6+0-0}{3+0}=2$$

$$*\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu^2x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu^2x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu^2x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu^2x}{x}=0\end{array}\right)\text{ και}$$

$$\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\left|\dfrac{1}{x}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0\end{array}\right)$$

iii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\sigma\upsilon\nu x+x^2\eta\mu x+2}{x^4+\eta\mu^4x+x}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha\, x\neq 0}}{\underset{\div x^4}{=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}}{1+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^4+\dfrac{1}{x^3}}\overset{*}{=}\frac{0+0+0}{1+0^4+0}=0$$

* παραπάνω δείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$, ομοίως :

$$\left(\begin{array}{l}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\left|\dfrac{1}{x^2}\right|\Leftrightarrow\left|\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{|x|^2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|^2}\le\dfrac{\eta\mu x}{x^2}\le\dfrac{1}{|x|^2}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|^2}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{|x|^2}\right)=0\overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}=0\end{array}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

24) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}-x\right)$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3}$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\eta\mu x}{x}$

25) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-\eta\mu x}{x^2+\sigma\upsilon\nu x}$ (Απ. 2)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x+5\eta\mu x}{2x-7\sigma\upsilon\nu x}$ (Απ. 3)

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu x}{x^2+1}$ (Απ. 0)

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu x}{x^2-3x+2}$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-\eta\mu x}{x+\sigma\upsilon\nu x}$ (Απ. 3)

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2\eta\mu x}{4x+1}$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{3+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x-5}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

ix. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2-x+2014}{x+1}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)$

x. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{5+\eta\mu x}$

xi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{2x+3}$

xii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΚΑΙ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

26)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3x^5-2x^2\le(x^5+2x+1)f(x)\le 3x^5+3x^2+5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Λύση :

i. Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^5+2x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$, άρα όταν $x\to-\infty$ τότε $x^5+2x+1<0$ άρα

$$3x^5-2x^2\le(x^5+2x+1)f(x)\le 3x^5+3x^2+5\Leftrightarrow\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}\ge f(x)\ge\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\le f(x)\le\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}$$

Έχω : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$

ii. Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5+2x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty$, άρα όταν $x\to+\infty$ τότε $x^5+2x+1>0$ άρα

$$3x^5-2x^2\le(x^5+2x+1)f(x)\le 3x^5+3x^2+5\Leftrightarrow\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}\le f(x)\le\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\Leftrightarrow$$

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^5}=3$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$

iii. Έχω $$\frac{3x^5+3x^2+5}{x^5+2x+1}\le f(x)\le\frac{3x^5-2x^2}{x^5+2x+1}\overset{\substack{x\to+\infty\\ \alpha\rho\alpha\, x>0}}{\Leftrightarrow}\frac{3x^5+3x^2+5}{x(x^5+2x+1)}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{3x^5-2x^2}{x(x^5+2x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^5+3x^2+5}{x^6+2x^2+x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{3x^5-2x^2}{x^6+2x^2+x}$$

Έχω : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-2x^2}{x^6+2x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^6}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5+3x^2+5}{x^6+2x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5}{x^6}=0$ άρα από κ.π. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

27) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x^3-3x^2\le(x^3-5x+2)f(x)\le 2x^3+3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (Απ. 2) ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (Απ. 0)

28)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\left|(x^3+3x-1)f(x)-2x^2\right|\le x$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. 0) ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu x\right)$ (Απ. 0)

29)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $6x^3-5x^2+2\le f(x)\le 6x^3+2x^2+7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3x-5}$ (Απ. $-\infty$)

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^4-2x^3+x}$ (Απ. 0) iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{2x^3-x+13}$ (Απ. 3)

30)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\dfrac{4x^2+x-2}{1-x^2}\le f^2(x)-4f(x)\le\dfrac{4x^3+x-2}{1-x^3}$ για κάθε $x>1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. 2)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΟΡΙΟ ΣΤΟ $\pm\infty$ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31)Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+2x-3}{x+5}=7$. Να βρείτε τα όρια : i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

Λύση :

i. Θέτω $g(x)=\dfrac{xf(x)+2x-3}{x+5}$, με $x\ne-5$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=7$

Έχω : : $g(x)=\dfrac{xf(x)+2x-3}{x+5}\Leftrightarrow g(x)(x+5)=xf(x)+2x-3\Leftrightarrow xf(x)=g(x)(x+5)-2x+3\Leftrightarrow$

Για $x\ne0$ $f(x)=\dfrac{g(x)(x+5)-2x+3}{x}$, κοντά στο $+\infty$, άρα :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)(x+5)-2x+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}\right]=7\cdot1-2=5$$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{g(x)(x+5)-2x+3}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)(x+5)-2x+3}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}\right]}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)\left(1+\frac{5}{x}\right)-2+\frac{3}{x}}{x}=\left(\frac{5}{+\infty}\right)=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

32)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-6x^2-3x+5}{x^2-5x+4}=4$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$ (Απ. 10)

33)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-\sqrt{x^2+x+2}}{2x+1}=3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. 7)

34)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-\eta\mu x}{x+1}=3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. 3)

35)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(x)-2x^3}{x^3+x^2+1}=3$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Απ. $+\infty$) ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ (Απ. 5)

36)Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-5x\right)=2$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3f(x)+\lambda x-2}{xf(x)-5x^2+1}=3$. (Απ. $\lambda=-9$)

37)Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-2x\right)=3$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}^*$, ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2f(x)+\lambda x-1}{xf(x)-2x^2+1}=1$.

38)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, όταν : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+x\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x-\sqrt{x^2+1}}=2$.

39)Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x}{\sqrt{x^2+1}+x}=4$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (Απ. 5)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+\alpha x^2+3x}{xf(x)-x^2+13}=3$ (Απ. 7)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΟΡΙΟ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Ισχύουν : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x) = -\infty$

Γενικά :

- Αν $\alpha > 1$ τότε : $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_\alpha x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$
- Αν $0 < \alpha < 1$ τότε : $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$

Συχνά : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

40)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + 2014 - e^x - 5x^2)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^4+5}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x-2}{x^3+5}}$

iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

v. $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x-3)$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x+1) - \ln(x^2-5x+6)\right)$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$

viii. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x - e^{\frac{1}{x}}\right)$

Λύση :

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + 2019 - e^x + 5x^2) = -\infty$

ii. Θέτουμε $u = x^4 + 5$, έτσι : $\lim\limits_{x\to-\infty} u = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+5) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^4) = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^4+5} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty$.

iii. Θέτουμε $u = \dfrac{x-2}{x^3+5}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x^3+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x-2}{x^3+5}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$.

iv. Θέτουμε $u = \dfrac{\ln x}{x}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{-\infty}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\cdot \ln x\right) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$

v. Θέτουμε $u = x-3$, έτσι : $\lim\limits_{x\to 3^+} u = \lim\limits_{x\to 3^+}(x-3) = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x-3) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln(x^2-5x+6)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

Θέτουμε $u = \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

vii. Θέτουμε $u = \sqrt{x^2+1}+x$, έτσι :

$$\lim_{x\to-\infty} u = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x} \overset{\substack{x<0 \\ \alpha\phi o\acute{\upsilon} \\ x\to-\infty}}{=\!=\!=\!=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

viii. Θέτουμε $u = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{u}$, έτσι : $\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\ln\dfrac{1}{u} - e^u\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\ln 1 - \ln u - e^u\right) = -\infty$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

41) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x + e^x + x^2)$ (Απ. $+\infty$)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x-2011) + x^5 + \sqrt{x-2} + e^x\right)$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x + e^x)$ (Απ. $-\infty$)

iv. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - x^{2013} + 2013)$ (Απ. $-\infty$)

v. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(e^x - x^2) + x^5 + \sqrt{x+4}\right)$ (Απ. 2)

vi. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\ln(x-2) + x^3 + \sqrt{x-2}\right)$ (Απ. $-\infty$)

vii. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1} + 2x^2 - \ln(1-x)\right)$ (Απ. $+\infty$)

viii. $\lim\limits_{x\to 5^-}\left(e^{x-4} + 2x^2 + 2\ln(5-x)\right)$ (Απ. $-\infty$)

ix. ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x^3-2x) - 2\ln(x+1)\right)$

x. ** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2x+3) - \ln(x^2+3x)\right)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :

- Αν έχω μια εκθετική π.χ. μόνο e^x , τότε τη βγάζω κοινό παράγοντα.
- Αν έχω 2 ή περισσότερες εκθετικές, τότε βγάζω κοινό παράγοντα αυτή με τη μεγαλύτερη βάση αν $x \to +\infty$. Αν $x \to -\infty$ κοινό παράγοντα βγάζω την εκθετική με τη μικρότερη βάση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

42)Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+1}{e^x+2}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}$ iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}=$

Λύση :

i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}+1}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot e+1}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(e+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}}=\frac{e+0}{1+0}=e$$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\cdot e+3^x}{e^x\cdot e^2+3^x\cdot 3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(\frac{e^x}{3^x}e+1\right)}{3^x\left(\frac{e^x}{3^x}e^2+3\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(\frac{e^x}{3^x}e+1\right)}{3^x\left(\frac{e^x}{3^x}e^2+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot e+1}{\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot e^2+3},$$ επειδή $0<\frac{e}{3}<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=0$, άρα θα είναι :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot e+1}{\left(\frac{e}{3}\right)^x\cdot e^2+3}=\frac{0\cdot e+1}{0\cdot e^2+3}=\frac{1}{3}$$

iii. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x+1}+3^x}{e^{x+2}+3^{x+1}}==\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot e+3^x}{e^x\cdot e^2+3^x\cdot 3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\left(e+\frac{3^x}{e^x}\right)}{e^x\left(e^2+\frac{3^x}{e^x}\cdot 3\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e+\left(\frac{3}{e}\right)^x}{e^2+3\left(\frac{3}{e}\right)^x}$$

επειδή $\frac{3}{e}>1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{e}\right)^x=0$, άρα θα είναι : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e+\left(\frac{3}{e}\right)^x}{e^2+3\left(\frac{3}{e}\right)^x}=\dfrac{e+0}{e^2+3\cdot 0}=\dfrac{e}{e^2}=\dfrac{1}{e}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

43) Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^x+5}{3^x+2^{x+1}+2}$ (Απ. 1)

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+2}+e^x-2}{e^x+e^{x+1}+1}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^x}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+2^{x+1}}{3^{x+2}+2^x}$

v. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7^x+3^x+1}{8^x+5^x+1}$

vi. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x+5^x-6}{2^x+2}$

vii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^{x+1}+2^{x+3}}{5^x-2^{x+1}}$ (Απ. -4)

viii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x-\alpha^x}{2^x+3\alpha^x}$, $\alpha>0$.

ix. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x-3\lambda^{x+1}}{2^x+\lambda^x}$, $\lambda>0$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

44) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{-\frac{1}{x}}$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$

ii. $\lim\limits_{x\to0} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

45)Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-\eta\mu x)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε τα όρια :

α. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$ γ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

46)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ όταν :

i. $f(x)\geq x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. $f:(0,+\infty)\to\Re$ και $f(x)>\eta\mu x+\ln x$, για κάθε $x>0$.

47)Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ όταν :

i. $(1+x^2)f(x)\leq x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)+x^2-e^x<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1.8Α ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

20. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της ;

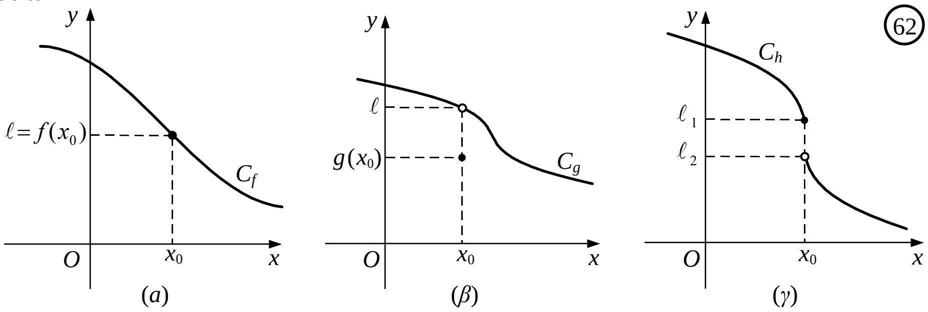
Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2006 ΟΜΟΓ., 2009 Β΄, 2010 ΟΜΟΓ., 2015)**

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$.

Σχόλια :

α) Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq g(x_0)$.

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f.

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα,

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2-x)=2$, οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, ενώ $f(1)=3$. ***(2019)***

γ) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, συνεχής συνάρτηση.

δ) — Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$.

— Κάθε ρητή συνάρτηση $\dfrac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=ημx$ και $g(x)=συνx$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} ημx=ημx_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} συνx=συνx_0$.

— Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\ne 1$ είναι συνεχείς.

21. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων.

Απάντηση :

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις :

i. $f+g$, ii. $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, iii. $f\cdot g$, iv. $\dfrac{f}{g}$, v. $|f|$ και vi. $\sqrt[\nu]{f}$ με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Σχόλιο : Τα αντίστροφα των i., iii., iv., v., και ii., για $c=0$, δεν ισχύουν. Δηλαδή, μπορεί οι συναρτήσεις : $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$, $0\cdot f$ να είναι συνεχείς στο x_0 και οι f, g να μην είναι συνεχείς στο x_0.

Για παράδειγμα : $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$. Προφανώς οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο 0, όμως οι συναρτήσεις :

- $(f+g)(x)=0$, $x\in\Re$,
- $(f\cdot g)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x\in\Re$,
- $|f(x)|=1$, $x\in\Re$,
- $0\cdot f(x)=0$, $x\in\Re$

είναι συνεχείς στο 0.

22. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης .

Απάντηση :

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g o f$ είναι συνεχής στο x_0 .

23. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση : **(2001 ΟΜΟΓ., 2008, 2012, 2012 ΕΣΠ., 2017)**

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον : $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

Σχόλιο :

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε καθένα από τα ξένα διαστήματα (α,β) και (β,γ), τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο $A=(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$.
- Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 , δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής και σε μια περιοχή του x_0 .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΟΡΙΣΜΟΣ

Όταν θέλουμε να εξετάσουμε ως προς τη συνέχεια μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, εργαζόμαστε ως εξής :

- Εξηγούμε γιατί είναι συνεχής κάθε κλάδος της συνάρτησης ξεχωριστά, στα ανοιχτά διαστήματα που ορίζεται.
- Εξετάζουμε (με τον ορισμό) τη συνέχεια στα σημεία που αλλάζει ο τύπος. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ τότε η f είναι συνεχείς στο x_0, αλλιώς όχι. Τονίζουμε ότι για την εύρεση του $\lim_{x\to x_0} f(x)$ εργαζόμαστε με πλευρικά όρια. Η f **δεν** είναι συνεχείς στο x_0, αν :
  - ✓ Δεν υπάρχει κάποιο από τα πλευρικά όρια ή
  - ✓ Τα πλευρικά όρια στο x_0 υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά ή
  - ✓ Τα πλευρικά όρια στο x_0 είναι ίσα, όχι όμως ίσα με το $f(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. (Άσκηση 2 σελ. 197 Α΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x $_0$ τις παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} x^2+4, x<2 \\ x^3, x\geq 2 \end{cases}$ αν x $_0$ =2

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, x<1 \\ \sqrt{3+x}, x\geq 1 \end{cases}$ αν x $_0$ =1

iii. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, x\neq -2 \\ -3, x=-2 \end{cases}$ αν x $_0$ =-2

Λύση :

i. Είναι : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2+4) = 8$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^3) = 8$, $f(2) = 2^3 = 8$

Άρα $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 8$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ii. Είναι : $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{3+x} = 2$, $f(1) = \sqrt{3+1} = 2$

Άρα $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

i. Είναι : $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2} = \lim_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-1) = -3$, $f(-2) = -3$

Άρα $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2) = -3$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = -2$.

2. (Άσκηση 4 σελ. 198 Α΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)
Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

i. $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3, x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, x>1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x, x\geq 0 \end{cases}$

Λύση :

i. Αν $x<1$, $f(x)=2x^2-3$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική

Αν $x>1$, $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών

Θα εξετάσω τώρα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ (σημείο αλλαγής τύπου)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x^2-3)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}+1=2$

$f(1)=-1$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$

ii. Αν $x<0$, $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνέχων

Αν $x>0$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής

Θα εξετάσω τώρα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ (σημείο αλλαγής τύπου)

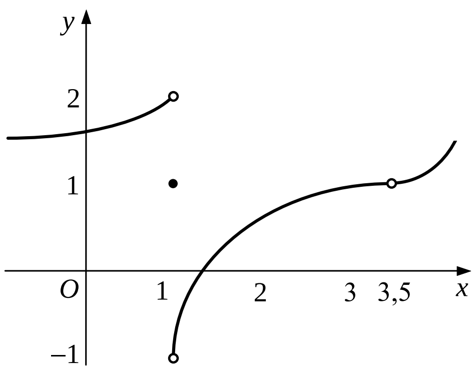
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

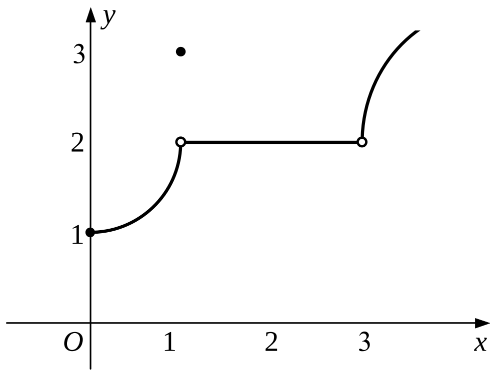
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$

$f(0)=\sigma\upsilon\nu 0=1$. Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

3. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\ln x+2x^2-3, & x>1\\ \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}, & 0<x\le 1\end{cases}$

5. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{3+\sigma\upsilon\nu x}-2, x\le 0\\ \dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x-2}, 0<x<2\\ 3\sqrt{1+3\sigma\upsilon\nu(x-2)}, x\ge 2\end{cases}$

6. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις :

   i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1\\ 0, x=1\end{cases}$ στο $x_0=1$

   ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}, x\neq -2\\ -3, x=-2\end{cases}$ στο $x_0=-2$

7. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

   i. $f(x)=\begin{cases}2x^2, & |x|\leq 1\\ \dfrac{2}{x}, & |x|>1\end{cases}$

   ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$

   iii. $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ \ln x, & x\geq 1\end{cases}$

   iv. $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leq 0\\ -x^2+1, & x>0\end{cases}$.

8. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

   i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, x<1\\ 2x-3, x\geq 1\end{cases}$

   ii. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, x<1\\ 5x^3-3, x\geq 1\end{cases}$

   iii. $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\ln(x^2+1), x<0\\ e^{2x}+x-1, x\geq 0\end{cases}$

   iv. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

   v. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & , x<0\\ 0 & , x=0\\ xe^{1-\frac{1}{x}} & x>0\end{cases}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x+\sigma\upsilon\nu x, & x<0\\ 2, & x=0\\ x^2-\eta\mu x+5, & x>0\end{cases}$.

   i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

   ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$.

10. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$ με f(0)=0, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(x)\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 0.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{1}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \\ xe^{\frac{1}{x}}, x<0 \end{cases}$.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.
iv. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.
ii. Να βρείτε τα όρια : α. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ β. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

13. Να ελέγξετε αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι παρακάτω συναρτήσεις. Για αυτές που δεν είναι να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας.

i. $f(x)=5x^2-x+4$ ii. $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ iii. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ iv. $f(x)=\ln(x-1)$

v. $f(x)=e^{x^2-1}$ vi. $f(x)=\eta\mu\dfrac{1}{x^2}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Αν μια συνάρτηση μας δίνεται ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και ζητείται να προσδιορίσω κάποιες παραμέτρους τότε κάνω χρήση του ορισμού : Η f είναι συνεχής στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Αν χρειαστεί κάνω χρήση του ορισμού με τα πλευρικά όρια : Η f είναι συνεχής στο x_0 τότε : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14. Για ποια τιμή του *α* η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{x^2+2\alpha}, & \textbf{αν} \quad \boldsymbol{x\leq 0} \\ \dfrac{\boldsymbol{\eta\mu x}}{\boldsymbol{x}}, & \textbf{αν} \quad \boldsymbol{x>0} \end{cases}$ είναι συνεχής;

Λύση :

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x)=x^2+2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή αρκεί $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Έχουμε όμως : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2\alpha)=2\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ και $f(0)=2\alpha$. Επομένως, αρκεί $2\alpha=1\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$.

15. (Άσκηση 1 σελ. 199 Β΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa), x\le 2\\ \kappa x+5, x>2\end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

<u>Λύση :</u>

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-\kappa)(x+\kappa)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-\kappa^2)=4-\kappa^2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\kappa x+5)=2\kappa+5$

$f(2)=(2-\kappa)(2+\kappa)=4-\kappa^2$

Άρα $4-\kappa^2=2\kappa+5\Leftrightarrow \kappa^2+2\kappa+1=0\Leftrightarrow \kappa=-1$

16. (Άσκηση 2 σελ. 199 Β΄ Ομάδας σχολικό βιβλίο)

Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12, x<1\\ 5, x=1\\ \alpha x+\beta, x>1\end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$, για τις οποίες η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

<u>Λύση</u> :

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\alpha^2x^2+\beta x-12)=\alpha^2+\beta-12$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta)=\alpha+\beta$

$f(1)=5$

Άρα $\begin{cases}\alpha^2+\beta-12=5,(1)\\ \alpha+\beta=5,(2)\end{cases}$

$(2):\alpha+\beta=5\Leftrightarrow \beta=5-\alpha$

$(1)\xrightarrow{(2)}\alpha^2+5-\alpha-12=5\Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-12=0\Leftrightarrow \alpha=4, \acute{\eta}, \alpha=-3$

- Για $\alpha=4$, (2) : $\beta=5-4\Leftrightarrow \beta=1$
- Για $\alpha=-3$, (2) : $\beta=5+3\Leftrightarrow \beta=8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ:

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}, x<1\\ \beta+1, x=1\\ ax^2-1, x>1\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}+\alpha x^2-\beta & ,x<1\\ \eta\mu(\pi x)+2 & ,1\le x\le 2\\ \ln(x-1)+2\beta\sigma\upsilon\nu(\pi x)-\alpha & ,x>2\end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

19. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α ώστε να είναι συνεχής οι συναρτήσεις :

i. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 2x+\alpha^2 x}{x}, x<0\\ x^2+3\alpha, x\ge 0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases}2x^2+3\alpha x-1, x<1\\ x^2+\alpha^2+2, 1\le x\le 2\\ \alpha x^2+x+\alpha-2, x>2\end{cases}$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{a-1}+\ln x, 0<x\le 1\\ \ln(3x-2)+e^{3a-3}, x>1\end{cases}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΙΜΗΣ Ή ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΗΣ $f(x)$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0\in D_f$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Άρα

- αν μας ζητείται η τιμή $f(x_0)$, τότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$
- αν μας ζητείται το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, τότε αρκεί να βρούμε το $f(x_0)$
- αν η f είναι συνεχής στο x_0 και μας δίνεται μια ανισοτική σχέση, τότε το $f(x_0)$ το βρίσκουμε χρησιμοποιώντας πλευρικά όρια και καταλήγοντας στις σχέσεις $f(x_0)\ge\alpha$, $f(x_0)\le\alpha$, οπότε $f(x_0)=\alpha$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x)=x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την τιμή f(2). Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Λύση :

Είναι $(x-2)f(x)=x^2-5x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Αν $x\neq 2$ τότε $(x-2)f(x)=x^2-5x+6 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$. Για να βρούμε το $f(2)$ θα χρησιμοποιήσουμε την συνέχεια της $f(x)$. Δηλ.

Η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο $x_0=2$ άρα ισχύει :

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1.$$

Άρα για τον τύπο της $f(x)$ ισχύει : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, x\neq 2\\ -1, x=2\end{cases}$.

22. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x)\leq \eta\mu(x-2)+x^2-2x$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε το f(2).

Λύση :

Επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η $f(x)$ συνεχής και στο $x_0=2$ άρα ισχύει : $\lim_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ (1)

- Για $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ έχω :

$$(x-2)f(x)\leq \eta\mu(x-2)+x^2-2x \Leftrightarrow f(x)\leq \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\frac{x^2-2x}{x-2}$$ κοντά στο 2^+

Άρα $\lim_{x\to 2^+}f(x)\leq \lim_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2)\leq \lim_{x\to 2^+}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} f(2)\leq 1+2\Leftrightarrow f(2)\leq 3$ (2) $\left(*\ \lim_{x\to 2}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}\ \underset{\substack{\acute{o}\tau\alpha\nu: x\to 2,\ u\to 0\\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon: u\to 0}}{\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\\ x-2=u}}{=\!=\!=\!=\!=}}\ \lim\dfrac{\eta\mu u}{u}=1\right)$

- Για $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ έχω :

$$(x-2)f(x)\leq \eta\mu(x-2)+x^2-2x \Leftrightarrow f(x)\geq \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\frac{x^2-2x}{x-2}$$ κοντά στο 2^-

Άρα $\lim_{x\to 2^-}f(x)\geq \lim_{x\to 2^-}\left(\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\dfrac{x^2-2x}{x-2}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(2)\geq \lim_{x\to 2^-}\dfrac{\eta\mu(x-2)}{x-2}+\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x(x-2)}{x-2}\Leftrightarrow$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} f(2)\geq 1+2\Leftrightarrow f(2)\geq 3$ (3). Άρα από (2) και (3) έχω ότι $f(2)=3$.

23. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ να βρεθεί η τιμή f(1) όταν $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}=4$.

Λύση :

Έστω : $g(x)=\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ με $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$ και $\lim_{x\to 1}g(x)=4$ έτσι :

$$g(x)=\frac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow (x-1)f(x)=g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)}{x-1}$, άρα είναι $\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+\eta\mu(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)}{x-1} + \lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \overset{*}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{g(x)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + 1 \overset{*}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{\sqrt{x}+1} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = \frac{4}{2} + 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 3$$

Επειδή όμως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ισχύει : $f(1) = \lim_{x\to1} f(x) \Leftrightarrow f(1) = 3$

$$(^{*}\lim_{x\to1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \underset{\substack{\acute{o}\tau\alpha\nu: x\to1,\ u\to0 \\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon: u\to0}}{\overset{\substack{\Theta\acute{\varepsilon}\tau\omega \\ x-1=u}}{=====}} \lim \frac{\eta\mu u}{u} = 1)$$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

<u>Λύση :</u>

Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right) = x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{f^2(x)+1} \quad (1)$$

Είναι : $|f(x)| = \left|\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}\right| = \frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1} \le \frac{|x^2-1|}{1} = |x^2-1|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, καθώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f^2(x)\ge 0 \Leftrightarrow f^2(x)+1\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{|x^2-1|}{f^2(x)+1} \le |x^2-1|$.

Επομένως : $|f(x)| \le |x^2-1| \Leftrightarrow -|x^2-1| \le f(x) \le |x^2-1|$

Έτσι : $\left.\begin{matrix}\lim_{x\to1}\left(-|x^2-1|\right) = 0 \\ \lim_{x\to1}\left(|x^2-1|\right) = 0\end{matrix}\right\}$ από κριτήριο παρεμβολής : $\lim_{x\to1} f(x) = 0$.

Επίσης : $f(1) = \frac{1^2-1}{f^2(1)+1} = 0$, άρα $\lim_{x\to1} f(x) = f(1) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

<u>**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ**</u>**:**

25. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f(x) = \sqrt{x+7} - 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή f(2).

26. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το f(0).

27. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

28. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $x^2 f(x) + x = x\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\sqrt{x^2+1} = 2\eta\mu^2 x + f(x)$, για κάθε $x \ne 0$. Αν f(0)=4, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

30. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta}{x-1}$, για κάθε $x\neq 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,4)$.
    i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
    ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

31. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$, για κάθε $x\neq -2$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-2,3)$.
    i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
    ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

32. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x)\le \eta\mu x+x^2-4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το f(0).

33. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f^2(x)+2x\eta\mu x\le 2xf(x)+\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
    i. Να βρείτε το f(0)
    ii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 0.

34. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $(x-1)f(x)\ge x^2-3x+2$ για κάθε $x\in\Re$. Αν f συνεχής στο $x_0=1$, να βρεθεί η τιμή f(1).

35. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)\cdot\eta\mu x\ge x^2+3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το f(0).

36. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf(x)-\eta\mu 3x\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε το f(0).

37. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3-2x^2\le f(x)\le 3+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

38. Αν η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0=4$, να βρεθεί η τιμή $f(4)$ όταν για κάθε $x\ge 0$, ισχύει : $4\sqrt{x}-8\le(x-4)f(x)\le x-4$.

39. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)+x^2-1}{\sqrt{x}-1}=12$. Να βρεθεί το $f(1)$.

40. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, και ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$ να βρεθεί το $f(0)$.

41. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(1,2). Αν επιπλέον ισχύει : $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=\frac{9}{16}$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

42. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-\eta\mu x\cdot\eta\mu 3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=8$. Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα y'y.

43. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ να βρεθεί η τιμή f(1) όταν $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)f(x)-x+1}{x^2\eta\mu(x-1)}=3$.

44. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $|xf(x)-3x+\eta\mu 3x|\le x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να βρείτε το f(0)
   ii. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση : $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}, x\ne 0\\ \alpha, x=0\end{cases}$ να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

45. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)+6f(x)+9\sigma\upsilon\nu^2 x\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

46. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)-4xf(x)\le -3x^2-2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
   i. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.
   ii. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

47. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, ώστε $f^3(x)+f(x)=\ln x$ (1), για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\alpha\in\Re$.
   i. Να βρείτε το f(0). ii. Να βρείτε το α ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu^2 x+2xf(x)}{x^2+\eta\mu x\cdot f(x)}=3$

49. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x}{x^2}=2$.
   i. Να βρείτε το f(0) και το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ ii. Να βρείτε το λ ώστε $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\lambda f^2(x)}{3x^2+x\eta\mu x}=3$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=1$, περιττή και $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{(x-1)^2}=3$.
   i. Να βρείτε το f(1).
   ii. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1=-1$.
   iii. Να βρείτε το $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-3}{x^2+1+2x}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4</u> : <u>ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ</u>

Όταν μια συνάρτηση f δίνεται μέσα από μια συναρτησιακή σχέση και γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής σε ένα σημείο α, τότε για να δείξουμε ότι είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού Α, αποδεικνύουμε ότι είναι συνεχής σε τυχαίο σημείο $x_0\in A$, χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή σχέση με αλλαγή μεταβλητής στην εύρεση του ορίου.

- Αν δίνεται $f(x+y)=...$ τότε για να δείξω ότι $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, ξεκινάω με $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και θέτω $x=x_0+h$, έτσι : $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)$, στη συνέχεια χρησιμοποιώ τη σχέση $f(x+y)=...$
- Αν δίνεται $f(x\cdot y)=...$ τότε για να δείξω ότι $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, ξεκινάω με $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και θέτω $x=x_0\cdot h$, έτσι : $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{h\to 1}f(x_0\cdot h)$, στη συνέχεια χρησιμοποιώ τη σχέση $f(x\cdot y)=...$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u>:

51. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$
   i. Να βρείτε το f(0).
   ii. Αν η f είναι συνεχής στο 2, να αποδείξετε ότι :
      α. η f είναι συνεχής στο 0, β. η f είναι συνεχής στο $\Re$.

52. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$, να δείξετε ότι :
   i. $f(1)=0$.
   ii. Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

53. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε την τιμή :
   i. $f(2)$, όταν $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h}=12$ και στη συνέχεια να βρείτε το όριο : $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$.
   ii. $f(3)$, όταν $\lim_{h\to 1}\frac{f(3h)}{h-1}=6$ και στη συνέχεια να βρείτε τα όρια :
      α. $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{\sqrt{x^2+7}-4}$ και β. $\lim_{x\to 3}\frac{\eta\mu f(x)}{x-3}$

1.8B ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

24. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση : (2013 ΟΜΟΓ., 2014 ΕΣΠ. Β΄, 2020 Π.Σ.)

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

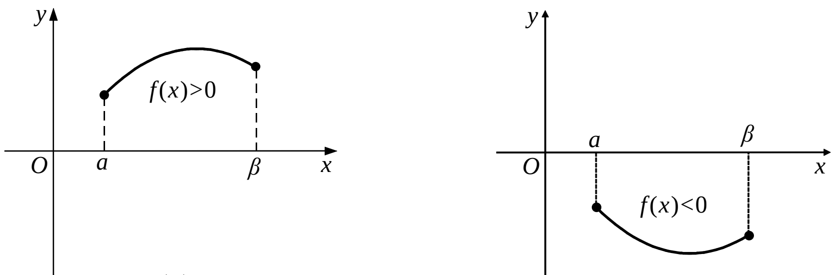
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

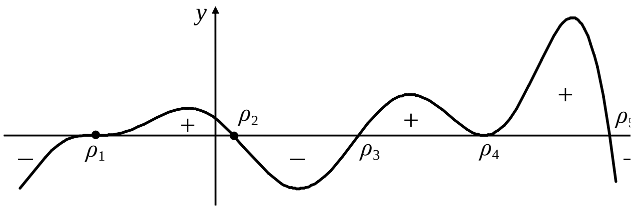
Σχόλια :

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.



(α) (β)

- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της *f* για τις διάφορες τιμές του *x*.

Παρατηρήσεις :

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\le 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

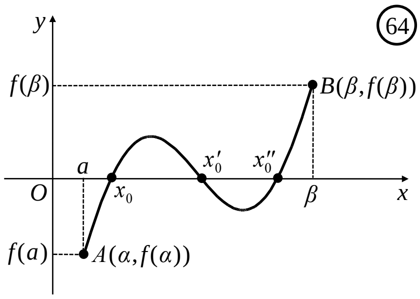
- Το αντίστροφο του θεωρήματος Bolzano, δεν ισχύει πάντα. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ που έχει ρίζα στο (α,β) αλλά δεν είναι συνεχής στο [α,β] ή δεν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

- Αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, δεν έχουμε ως συμπέρασμα ότι η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

25. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

Απάντηση :

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO ΚΑΙ ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α.** Για να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση έχει μια **τουλάχιστον** ρίζα σε ένα διάστημα (α,β) ακολουθούμε τα εξής βήματα :

- φέρνουμε όλους τους όρους στο α' μέλος
- θεωρούμε το α' μέλος ως μια συνάρτηση f
- εξασφαλίζουμε για την f τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [α,β].

Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ή $h(x)=f(x)-\kappa$ αντίστοιχα και εφαρμόζω Θ.Bolzano στην h.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

54. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x+2=3\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (0,π).

Λύση :

Έχω $4x+2-3\sigma\upsilon\nu x=0$, έστω $f(x)=4x+2-3\sigma\upsilon\nu x$, $D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο [0,π]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,π] ως πράξεις συνέχων (π.σ.)
- $f(0)=-1<0$, $f(\pi)=4\pi+2-3\sigma\upsilon\nu\pi=4\pi+2+3=4\pi+5>0$

Άρα $f(0)\cdot f(\pi)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,π)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

55. Να δειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα, οι παρακάτω εξισώσεις :
 i. $x^3-3x^2-x+3=0$ στο (0,2) ii. $3x+\ln x^4=x^2+4$ στο (1,e)
 iii. $x\ln\sqrt{x}+x^2\ln x=2$ στο (1,e) iv. $2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu 3x=0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$

56. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x-x+1$ τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (0,π). (Υποδ. Η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα)

57. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-4x^2-4x+16$ τέμνει τον άξονα x’x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα (1,3).

58. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\Re$, ώστε $f(0)<1$ και $f(1)>3$, τότε η εξίσωση $f(x)=e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (0,1).

59. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ και $g(x)=xe^x-3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,e) . (Υποδ. Οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο αν η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα. Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και εφαρμόζοντας Θ. Bolzano για την $h(x)$ δείχνω ότι η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.)

60. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\ln x+3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα (1,e) .

61. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις *f*, να βρείτε έναν ακέραιο *α* τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha,\alpha+1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα
 i. $f(x)=x^3+x-1$ ii. $f(x)=x^5+2x+1$
 iii. $f(x)=x^4+2x-4$ iv. $f(x)=-x^3+x+2$

62. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $0<f(x)<1$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^2(x)-2f(x)+2x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1) .

63. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε $x\in\Re$, όπου $\beta,\gamma\in\Re$ με $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1). (Πανελλήνιες 2001)

64. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g συνεχής στο [α,β]. Η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $\alpha<g(x)<\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)+x=f(x)+g(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β).

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β.** Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση έχει περισσότερες ρίζες, τότε εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία σε περισσότερα διαστήματα, είτε χωρίζοντας το αρχικό διάστημα, είτε εντοπίζοντας νέα διαστήματα. Τα διαστήματα δεν πρέπει να έχουν κοινά εσωτερικά στοιχεία.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

65. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+2x^2=1$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα (-1,1).

Λύση :

Έχω $x^4+2x^2-1=0$, έστω $f(x)=x^4+2x^2-1$, $D_f=\Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-1,1). Εφαρμόζω Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [-1,0] & [0,1]

Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [-1,0]

- $f(x)$ συνεχής στο [-1,0] ως πολυωνυμηκή
- $f(-1)=2>0$, $f(0)=-1<0$ Άρα $f(-1)\cdot f(0)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-1,0)

Θ.Bolzano για την $f(x)$ στα [0,1]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμηκή
- $f(0)=-1<0$, $f(1)=2>0$ Άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-1,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

66. Να δειχθεί ότι έχουν δυο τουλάχιστον ρίζες οι επόμενες εξισώσεις :

i. $4x^3-3x^2-8x+6=0$ στο (0,2)

$x-3-5\eta\mu x=0$ στο $(-\frac{\pi}{2},\pi)$

ii. $(3-x)\ln x=x^3-5x^2+5x$ στο (1,4)

67. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=(x-2)e^x-(x+2)$ έχει :

i. μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,3)

ii. δυο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ.** Αν η εξίσωση περιέχει παρανομαστές και η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κάποιο άκρο, τότε πρώτα απαλείφουμε τους παρανομαστές και μετά θέτουμε συνάρτηση f(x).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

68. (Άσκηση 5β) σελ. 200 Ομάδας σχολικού βιβλίου)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

Λύση : Αν θέσουμε ως συνάρτηση $f(x)$ το 1ο μέλος της εξίσωσης δεν θα ορίζονται τα $f(1), f(2)$ με αποτέλεσμα να μην μπορώ να εφαρμόσω Θ.Β. Γι' αυτό κάνω πρώτα απαλοιφή παρανομαστών : $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0 \Leftrightarrow e^x(x-2)+\ln x\cdot(x-1)=0$, έστω $f(x)=e^x(x-2)+\ln x\cdot(x-1)$, $D_f=(0,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Εφαρμόζω Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο [1,2]

- $f(x)$ συνεχής στο [1,2] ως π.σ.
- $f(1)=-e<0$, $f(2)=\ln 2>0$ Άρα $f(1)\cdot f(2)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

69. Να δειχθεί ότι έχουν μια τουλάχιστον ρίζα, στο αντίστοιχο διάστημα, οι παρακάτω εξισώσεις : :

i. $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^3+1}{x-2}=0$ στο (1,2) ii. $\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{e^x+1}{x-2}=0$ στο (1,2)

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Δ.** Αν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β] (Δηλ. ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$) τότε αρκεί να δείξουμε ότι $f(\alpha)f(\beta)\le 0$ και διακρίνω τις περιπτώσεις

- αν $f(\alpha)f(\beta)=0$, τότε θεωρούμε $x_0=\alpha$ ή $x_0=\beta$
- αν $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε ισχύει το Bolzano

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα [-3,3] και για κάθε $x\in[-3,3]$ ισχύει $|f(x)|\le 3$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3].

Λύση : Έχω $f(x)-x=0$, έστω $g(x)=f(x)-x$, $D_g=[-3,3]$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3]. Εφαρμόζω Θ.Bolzano για την $g(x)$ στο [-3,3]

- $g(x)$ συνεχής στο [-3,3] ως π.σ.
- Από εκφώνηση : $|f(x)|\le 3 \Leftrightarrow -3\le f(x)\le 3$ (1) για κάθε $x\in[-3,3]$
  Άρα $g(-3)=f(-3)+3\ge 0$ (Από (1) : $-3\le f(-3)\le 3 \Leftrightarrow 0\le f(-3)+3\le 6$)
  Και $g(3)=f(3)-3\le 0$ (Από (1) : $-3\le f(3)\le 3 \Leftrightarrow -6\le f(3)-3\le 0$)

Άρα $g(-3)\cdot g(3)\le 0$

- Αν $g(-3)\cdot g(3)=0 \Leftrightarrow g(-3)=0 \Leftrightarrow$ το -3 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
  ή $g(3)=0 \Leftrightarrow$ το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
- Αν $g(-3)\cdot g(3)<0$ από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-3,3)

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο [-3,3]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο [α,β] με $f(\alpha)+f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [α,β].

72. Έστω $f:\Re\to\Re$ συνεχής συνάρτηση με $f(1)+f(2)=7$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x^2=4x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [1,2].

73. Έστω $f:\Re\to[0,6]$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-6f(x)+9x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο [0,1].

❖ **ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Ε.** Αν σε κάποιο άκρο (ή και στα δυο) δεν ορίζεται η f(x) τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο της τιμής της f από όριο :

- αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l<0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l>0$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^+ τέτοιο ώστε $f(\alpha)<0$
- αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, τότε υπάρχει α κοντά στο x_0^- τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

74. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=\dfrac{1}{x-1}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

Λύση : Έστω $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x-1}$, $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\dfrac{1}{x-1}\right)=(-\infty)-\dfrac{1}{0-1}=-\infty$, οπότε υπάρχει α κοντά στο 0^+ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)<0$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\ln x-\dfrac{1}{x-1}\right)=0-(-\infty)=+\infty$, οπότε υπάρχει β κοντά στο 1^- τέτοιο, ώστε $f(\beta)>0$
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]\subseteq(0,1)$ και επιπλέον $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\beta)\subseteq(0,1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

75. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=x^2-2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

76. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=x^2-4x+2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0,1).

77. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1)+\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΥΠΑΡΞΗ $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΜΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ

Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ (ή $\xi \in (\alpha,\beta)$) που να ικανοποιεί μια ισότητα, εργαζόμαστε ως εξής :

- Στην ισότητα που δίνεται, (αν χρειάζεται κάνουμε απαλοιφή παρανομαστών) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και θέτουμε όπου x_0 το x.
- Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)$ το πρώτο μέλος.
- Εφαρμόζουμε Θ. Bolzano για την $g(x)$ στο [α,β] και δείχνουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$. Από την ισότητα $g(x_0)=0$ οδηγούμαστε στη ζητούμενη ισότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

78. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,-1)$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε : $x_0\left(f(x_0)-1\right)=\beta f(x_0)-\alpha$.

Λύση : Θα δείξω ότι η εξίσωση $x\left(f(x)-1\right)=\beta f(x)-\alpha$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β). Έστω $g(x)=x\left(f(x)-1\right)-\beta f(x)+\alpha$, $D_g=[\alpha,\beta]$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β). Θ.Β. για τη $g(x)$ στο [α,β]

- $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως π.σ.
- Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(\alpha,-1)$ άρα $f(\alpha)=-1$,
  $g(\alpha)=\alpha(f(\alpha)-1)-\beta f(\alpha)+\alpha=-2\alpha+\beta+\alpha=\beta-\alpha>0$ ($\alpha<\beta$ άρα και $\alpha\neq\beta$)
  $g(\beta)=\beta(f(\beta)-1)-\beta f(\beta)+\alpha=\beta f(\beta)-\beta-\beta f(\beta)+\alpha=\alpha-\beta<0$

Άρα έχω $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

79. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha-1,\alpha+1]$ και για κάθε $x\in\Re$ ισχύει $f(x-2)=f(x+2)$ (1). Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha-1,\alpha+1]$ ώστε να είναι $f(x_0-1)=f(x_0+1)$.

Λύση : Θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x-1)=f(x+1)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$. Έστω $g(x)=f(x-1)-f(x+1)$, $D_g=\Re$, άρα θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$. Θ.Β. για τη $g(x)$ στο $[\alpha-1,\alpha+1]$

- $g(x)$ συνεχής στο $[\alpha-1,\alpha+1]$ ως π.σ.
- $g(\alpha-1)=f(\alpha-1-1)-f(\alpha-1+1)=f(\alpha-2)-f(\alpha)$

  $g(\alpha+1)=f(\alpha+1-1)-f(\alpha+1+1)=f(\alpha)-f(\alpha+2)\overset{(1)}{=}f(\alpha)-f(\alpha-2)=-[f(\alpha-2)-f(\alpha)]$

Άρα έχω $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)=-[f(\alpha-2)-f(\alpha)]^2\leq 0$

- Αν $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow g(\alpha-1)=0 \Leftrightarrow$ το α-1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
  ή $g(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow$ το α+1 είναι ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$
- Αν $g(\alpha-1)\cdot g(\alpha+1)<0$ από Θ.Β. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\alpha-1,\alpha+1)$

Άρα σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[\alpha-1,\alpha+1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

80. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

81. **Έστω $f : \Re \to \Re$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει : $(x^2 - 4x + 2) f(x) \leq f(0) + f(4)$. Να αποδείξετε ότι :
   i. $f(0) = f(4)$
   ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,2]$ τέτοιο ώστε : $f(\xi^2) = \xi \cdot f(2\xi)$.

82. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{\eta\mu\xi}{\xi - 1} = 1 + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\xi - 3}$.

83. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g που είναι συνεχείς στο [α,β]. Αν $f(\alpha) > g(\alpha)$ και $f(\beta) < g(\beta)$, να αποδεδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

84. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 4f^2(x) + 5f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - 3x$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = 0$.

85. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν $f(0) < 1$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 \eta\mu \dfrac{1}{x_0}$.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ ΣΤΟ (α,β)

Για να δείξω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα στο (α,β):

1ο Βήμα : Δείχνω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β) με Θ. Bolzano

2ο Βήμα : Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β), οπότε η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

86. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x = 2 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1)

<u>Λύση :</u> Έχω : $e^x = 2 - x \Leftrightarrow e^x + x - 2 = 0$, έστω $f(x) = e^x + x - 2$, $D_f = \Re$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

1ο Βήμα : θ.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

Θ.Β. για την $f(x)$ στο [0,1]

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1] ως π.σ.
- $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 1 > 0$ άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ και άρα από Θ.Β. η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1)

2ο Βήμα : θ.δ.ο. η $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη

Έστω $x_1, x_2 \in \Re$ με :

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$ (2), προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + x_1 - 2 < e^{x_2} + x_2 - 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. Άρα τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

87. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $e^x = 3 - 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο (0,1)

88. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\ln x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο (1,e).

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 2x$ και $g(x) = 15 - 5x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα (2,3).

90. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha(x-\mu)(x-\nu) + \beta(x-\lambda)(x-\nu) + \gamma(x-\lambda)(x-\mu) = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

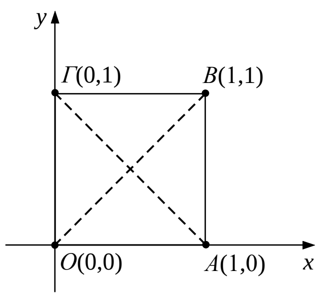
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ Θ. BOLZANO

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

91. Ένας πεζοπόρος ξεκάνει από ένα χωριό Α στις 6 π.μ. και φτάνει σε ένα άλλο χωριό Β στις 11 π.μ. Την επόμενη μέρα ξεκάνει από το χωριό Β στις 6 π.μ. και φτάνει στο χωριό Α στις 11 π.μ., κάνοντας την ίδια διαδρομή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δυο ημέρες.

92. Ένα αυτοκίνητο ξεκάνει στις 7 π.μ. από μια πόλη Α και φτάνει στις 12 μ.μ. σε μια πόλη Β. Την επόμενη μέρα ξεκάνει στις 7 π.μ. από την πόλη Β και φτάνει στις 12 μ.μ. στην πόλη Α ακλουθώντας την ίδια διαδρομή. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δυο ημέρες.

93. Δίνεται το τετράγωνο *ΟΑΒΓ* του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0,1]$ συνάρτηση *f* της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



i. Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου
ii. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

1.8Γ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γ. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO

26. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του ενδιαμέσων τιμών.

Διατύπωση :

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$

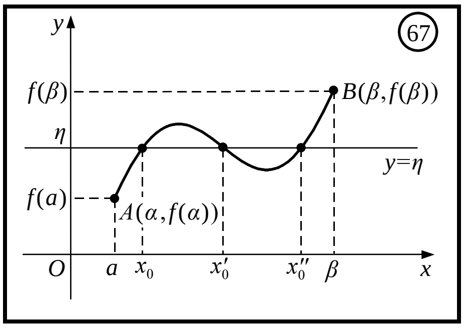
Απόδειξη : **(2001 ΟΜΟΓ., 2005, 2010 ΕΣΠ. Β΄, 2013 ΕΣΠ., 2015, 2020 Ν.Σ.)**

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

Αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



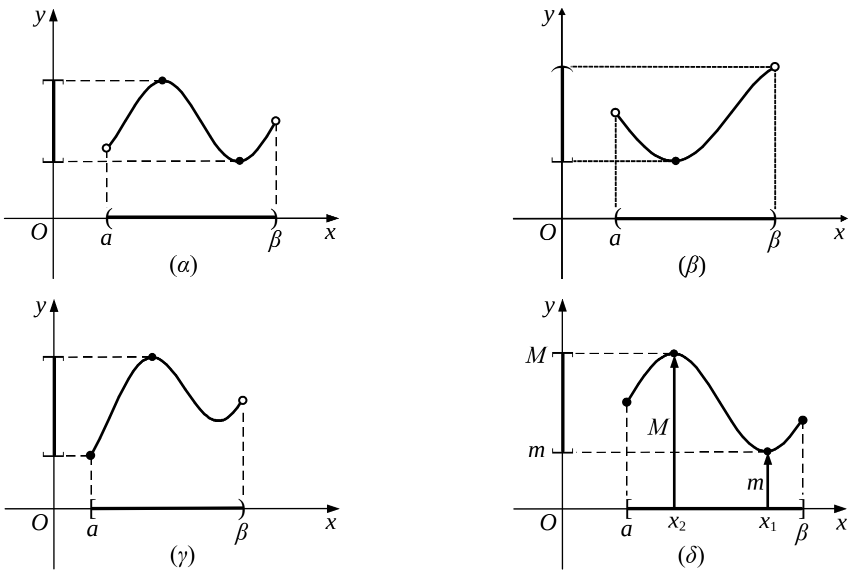
Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β] και τα σημεία $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας $y=\eta$, τότε η C_f τέμνει την ευθεία $y=\eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0,\eta)$ με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

Σχόλια :

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

β) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



27. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Απάντηση :

Στην ειδική περίπτωση που το *Δ* είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

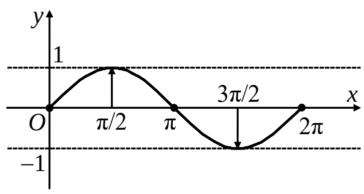
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$\boldsymbol{m \leq f(x) \leq M}$, για κάθε $\boldsymbol{x \in [\alpha,\beta]}$.

Σχόλιο :

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m,M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

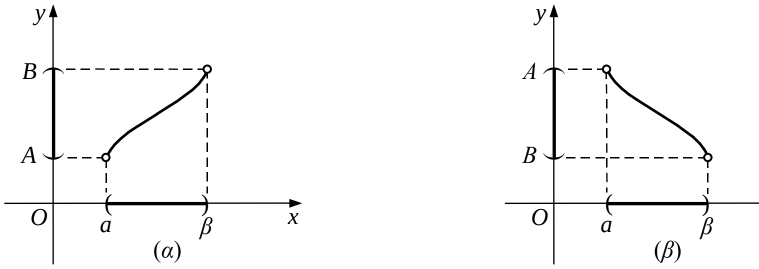
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $\mathrm{M} = 1$.



- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) (Σχ. 71α), όπου $\mathrm{A} = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B} = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) (Σχ. 71β).

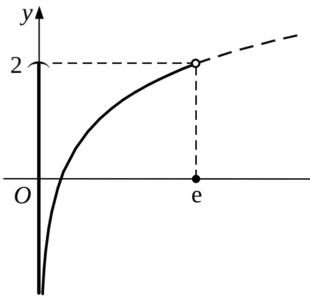


71

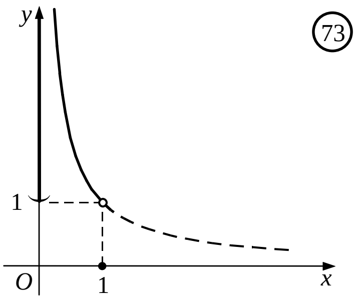
Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\ln x+1$, $x\in(0,e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty,2)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to e^-} f(x)=2\,.$$



72



73

— Το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1} f(x)=1\,.$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ και $(\alpha,\beta]$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Θ.Ε.Τ. – ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ & ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Α. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε : $f(x_0)=\eta$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παίρνει δυο τιμές διαφορετικές μεταξύ τους, τότε η f παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες (Θ.Ε.Τ.). Άρα αν η f δεν είναι σταθερή, τότε το σύνολο τιμών της f(Δ) είναι επίσης διάστημα.

Β. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu\in[\alpha,\beta]$ ώστε : $f(x_\varepsilon)=\mu\leq f(x)\leq \mathrm{M}=f(x_\mu)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ που σημαίνει ότι τα μ, Μ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$

Γ. Ένα θεωρητικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω θεωρήματα είναι ότι «Αν η f είναι συνεχείς και ¨1-1¨ σε διάστημα Δ, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Δ».

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+5x^3-x+10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=50$.

1ος Τρόπος : Εφαρμόζω Θ.Ε.Τ. για την $f(x)$

- $f(x)$ συνεχής στο [1,2] ως πολυωνυμική
- $f(1)\neq f(2)$ (αφού $f(1)=15,\quad f(2)=80$)

Άρα από Θ.Ε.Τ. , αφού $f(1)<50<f(2)$, η εξίσωση $f(x)=50$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2)

2ος Τρόπος : Έστω $g(x)=f(x)-50$, θ.δ.ο. η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2). Εφαρμόζοντας Θ.Bolzano στη $g(x)$ στο [1,2] …

95. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1]. Αν f(0)=2 και f(1)=4 να δείξετε ότι :

i. Η ευθεία y=3 , τέμνει τη C_f , σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$

ii. Υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

(ΘΕΜΑ Β 2000)

Λύση :

i. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=3$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1)

1ος Τρόπος : Εφαρμόζω Θ.Ε.Τ. για την $f(x)$

- $f(x)$ συνεχής στο [0,1]

- $f(0) \neq f(1)$ (αφού $f(0) = 2, f(1) = 4$)

Άρα από Θ.Ε.Τ. , αφού $f(0) < 3 < f(1)$, η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και μοναδική.

2^{ος} Τρόπος : Έστω $g(x) = f(x) - 3$, θ.δ.ο. η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0,1). Θ.Β. στη $g(x)$ στο [0,1] και μονοτονία…

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0,1], έχουμε :

$0 < x < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(x) < f(1)$ για κάθε $x \in (0,1)$. Άρα :

- $f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$ (1)
- $f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$ (2)
- $f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1)$ (3)
- $f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$ (4)

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1), (2), (3), (4) έχω :

$$4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0) \neq f(1)$, επομένως :

από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1) = \dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, είναι και μοναδικό.

96. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4] \to \Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0) = \dfrac{f(1) + 2f(2) + 3f(4)}{6}$.

Λύση :

Επειδή η f είναι συνεχής στο [1,4], από Θ.Μ.Ε.Τ. θα έχει μέγιστη τιμή Μ και ελάχιστη τιμή m επομένως θα ισχύει $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ για κάθε $x \in [1,4]$. Άρα :

- $m \leq f(1) \leq \mathrm{M}$ (1)
- $m \leq f(2) \leq \mathrm{M} \Leftrightarrow 2m \leq 2f(2) \leq 2\mathrm{M}$ (2)
- $m \leq f(4) \leq \mathrm{M} \Leftrightarrow 3m \leq 3f(3) \leq 3\mathrm{M}$ (3)

Αν προσθέσω κατά μέλη τις (1), (2), (3), έχω : $6m \leq f(1) + 2f(2) + 3f(3) \leq 6\mathrm{M} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m \leq \dfrac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} \leq \mathrm{M}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\Delta = [1,4]$, το σύνολο τιμών της f θα είναι το διάστημα $f(\Delta) = [m, \mathrm{M}]$. Έτσι ο αριθμός $\eta = \dfrac{f(1) + 2f(2) + 3f(4)}{6}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, έτσι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0) = \dfrac{f(1) + 2f(2) + 3f(4)}{6}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^5+5x^3-x+10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=50$.

98. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[1,3]\to\Re$ με $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και $f(1)\cdot f(3)=10$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,3)

99. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(2)+f(3)<5<f(1)+f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi,\eta\in\Re$, ώστε $\xi+\eta=5$ και $f(\xi)+f(\eta)=5$.

100. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,5]\to\Re$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[1,5]$, τέτοιο ώστε : $f(x_0)=\dfrac{3f(2)+5f(3)+7f(4)}{15}$.

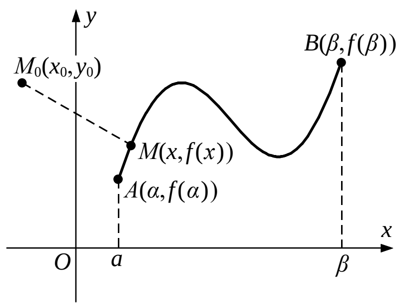
101. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,4]$ τέτοιο ώστε $2f(1)+3f(2)+4f(3)=9f(\xi)$.

102. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,4]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f(1)+2f(2)+3f(3)=6f(\xi)$.

103. Έστω συνάρτηση f συνεχής και $f\uparrow[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$.

104. Έστω f συνεχής και γνησίως μονότονη στο [0,4] με $f(4)=1$ και $f(0)=7$.
   i. Να βρεθεί το είδος μονοτονίας της f.
   ii. Αν $\alpha\in[1,7]$ να δείξετε ότι η $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο [0,4]
   iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi)=\dfrac{f(1)+3f(2)+5f(3)}{9}$.

105. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη *C* είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0,y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου.



   i. Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x)=(M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0,y_0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.
   ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΥΡΕΣΗ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα, στα οποία χωρίζουν το πεδίο ορισμού οι διαδοχικές ρίζες της. Η διαδικασία που ακολουθούμε ώστε να βρούμε το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι η εξής :

- Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$, $x \in D_f$
- Σε πίνακα πρόσημου χωρίζουμε το πεδίο ορισμού σε διαστήματα, τοποθετώντας τις ρίζες και τα ανοικτά άκρα του πεδίου ορισμού.
- Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που δημιουργούνται επιλέγουμε κατάλληλο αριθμό ξ και βρίσκουμε το πρόσημο της τιμής $f(\xi)$. Το πρόσημο αυτό έχει η f σε ολόκληρο το αντίστοιχο διάστημα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

106. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης : $f(x)=\text{ημ}x-\text{συν}x$, $x\in[0,2\pi]$.

Λύση :

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της $f(x)=0$ στο $[0,2\pi]$. Έχουμε

$\text{f(x)}=0 \Leftrightarrow \text{ημ}x-\text{συν}x=0 \Leftrightarrow \text{ημ}x=\text{συν}x \overset{\text{συν}x\neq 0}{\Leftrightarrow} \text{εφ}x=1 \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ και $x\in[0,2\pi]$ άρα $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$, επομένως διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που οι διαδοχικές ρίζες χωρίζουν το $[0,2\pi]$, δηλαδή στα διαστήματα : $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$.

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	$f(0)=-1$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$	$f(2\pi)=-1$
Πρόσημο	$-$	$+$	$-$

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$ είναι $f(x)<0$, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$ είναι $f(x)>0$.

107. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$

Λύση : $f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$, πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$ (1) και $16-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-4,4]$ (2) άρα από (1) και (2) $D_f=[-3,4]$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=1 \Leftrightarrow x+3=1 \Leftrightarrow x=-2$ δεκτή

ή $\sqrt{16-x^2}=0 \Leftrightarrow 16-x^2=0 \Leftrightarrow x=4$ δεκτή ή $x=-4$ απορ.

x	-3	-2		4
$\sqrt{x+3}-1$	-	0	+	
$\sqrt{16-x^2}$	+		+	0
$f(x)=\left(\sqrt{x+3}-1\right)\sqrt{16-x^2}$	-		+	

Άρα : $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-3,-2)$, $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,4)$ και $f(x)=0$ όταν $x=-2, ή, x=4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

108. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ με : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$

   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
   ii. Να βρεθούν οι ρίζες της f(x)=0
   iii. Να αποδειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα (-3,3)

109. Να βρείτε το πρόσημα της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν :

   i. $f(x)=\sqrt{2}\cdot \sigma\upsilon\nu x-1, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
   ii. $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, \quad x\in[0,2\pi]$.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu 2x+2(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-1$

   i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ στο [0,π].
   iii. Να βρείτε το πρόσημο της f στο [0,π].

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΑΠΟ f^2.

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να βρούμε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη σχέση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : $\boxed{f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in A}$

111. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x)=x^2+9$, για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\Re$, $f^2(x)=x^2+9 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{x^2+9}$, (1)

Όμως $\sqrt{x^2+9}\neq 0$, για κάθε $x\in\Re$, άρα από (1) έχουμε : $|f(x)|\neq 0 \Leftrightarrow f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=3>0$, συνεπώς $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

112. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0)=-3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x)=9+6xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f^2(x)=9+6xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)-6xf(x)=9 \Leftrightarrow$
$f^2(x)-6xf(x)+9x^2=9x^2+9 \Leftrightarrow (f(x)-3x)^2=9x^2+9 \Leftrightarrow |f(x)-3x|=\sqrt{9x^2+9}$ (1)

Έστω η συνάρτηση : $g(x)=f(x)-3x$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Οπότε η (1) γίνεται : $|g(x)|=\sqrt{9x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$ (2).

Όμως $\sqrt{9x^2+9}\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα από (2) έχουμε : $|g(x)|\neq 0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και g συνεχής, άρα η g διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(0)=f(0)-0=-3<0$, συνεπώς $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά η (2) γίνεται $-g(x)=\sqrt{9x^2+9} \Leftrightarrow g(x)=-\sqrt{9x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-3x=-\sqrt{9x^2+9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)=3x-\sqrt{9x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 :

$\boxed{f(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x \text{ ανήκει στο εσωτερικό το A και μηδενίζει στα άκρα του A}}$

113. (Άσκηση 7 σελ. 200 Ομάδας σχολικό βιβλίο)
Έστω f μια συνεχή συνάρτηση στο διάστημα [-1,1], για την οποία ισχύει : $x^2+f^2(x)=1$ για κάθε $x\in[-1,1]$

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$
ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).
iii. Να βρεθεί ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f.
iv. Αν $f(0)=1$, να βρείτε την f.

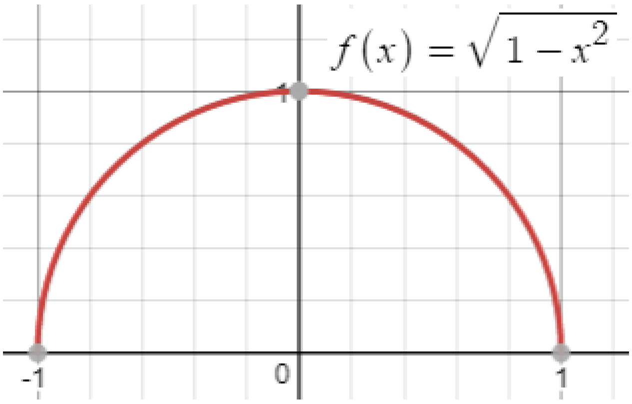
Λύση :

i. Έχω $x^2 + f^2(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 - x^2$,
$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, ή, x = -1$.

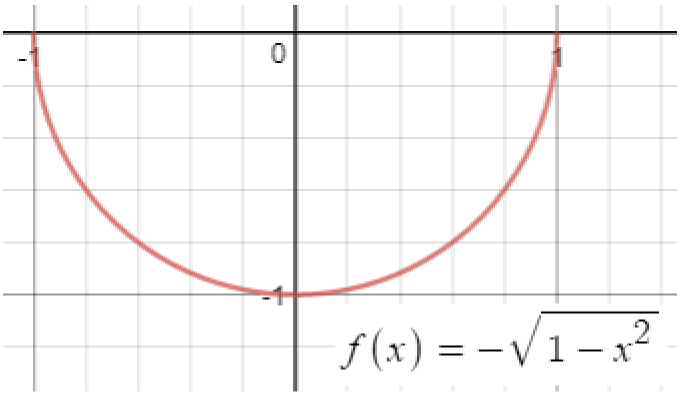
ii. Στο διάστημα (-1,1) η $f(x)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζει (αφού οι μόνες ρίζες της $f(x) = 0$ είναι οι $x = 1, ή, x = -1$) άρα η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1).

iii. Η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-1,1) άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

• Αν $f(x) > 0$ στο $(-1,1)$, τότε : $f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και από τη σχέση $f^2(x) = 1 - x^2$ παίρνουμε : $f(-1) = f(1) = 0$,έτσι έχουμε $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.



• Αν $f(x) < 0$ στο $(-1,1)$, τότε : $f^2(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow -f(x) = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και από τη σχέση $f^2(x) = 1 - x^2$ παίρνουμε : $f(-1) = f(1) = 0$,έτσι έχουμε $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$.



iv. Επειδή $f(0) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Άρα $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.

114. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\Re$ με $f^2(x)-3x-4=-x^2$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
iii. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Λύση :

i. Για κάθε $x\in\mathrm{A}$ είναι : $f^2(x)=-x^2+3x+4$, όμως $f^2(x)\geq 0$ άρα πρέπει $-x^2+3x+4\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,4]$ οπότε : $\mathrm{A}=[-1,4]$.

ii. $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+3x+4=0 \Leftrightarrow x=-1 \quad ή \quad x=4$.

iii. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο με τεταγμένη -2, δηλ. το σημείο $\mathrm{M}(0,-2)\in C_f \Leftrightarrow f(0)=-2$.

Επίσης : $f^2(x)=-x^2+3x+4 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{-x^2+3x+4}$

Όμως η f είναι συνεχής στο $(-1,4)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,4)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-1,4)$ και $f(0)=-2<0$ άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,4)$. Επίσης είναι $f(-1)=f(4)=0$, οπότε : $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[-1,4]$.

Έτσι έχουμε :

$|f(x)|=\sqrt{-x^2+3x+4} \Leftrightarrow -f(x)=\sqrt{-x^2+3x+4} \Leftrightarrow f(x)=-\sqrt{-x^2+3x+4}$ για κάθε $x\in[-1,4]$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 :

Η f μηδενίζει σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του Α και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq x_0$

115. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in\Re$.

Λύση :

Έχουμε : $f^2(x)=x^2$, $x\in\Re$

$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$, δηλ. $f(0)=0$

Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

- Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ τότε : $f^2(x)=x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x| \Leftrightarrow -f(x)=-x \Leftrightarrow f(x)=x$ (1)
- Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ τότε : $f^2(x)=x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x| \Leftrightarrow f(x)=-x$ (2)

Ομοίως η συνάρτηση f στο διάστημα $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε αυτό άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.

- Αν $f(x)<0$ στο $(0,+\infty)$ τότε : $f^2(x)=x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x| \Leftrightarrow -f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=-x$ (3)
- Αν $f(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ τότε : $f^2(x)=x^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|x| \Leftrightarrow f(x)=x$ (4)

Συνδυάζοντας τα παραπάνω η $f:\Re\to\Re$ έχει έναν από τους παρακάτω τύπους :

1ον από (1), (3) $f(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ -x & ,x\geq 0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

2ον από (1), (4) $f(x)=\begin{cases} x & ,x<0 \\ x & ,x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x$ για κάθε $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

3ον από (2), (3) $f(x)=\begin{cases} -x & ,x<0 \\ -x & ,x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=-x$ για κάθε $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

4ον από (2), (4) $f(x)=\begin{cases} -x & ,x<0 \\ x & ,x\geq 0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

116. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\Re$ η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0=0$. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ που ικανοποιούν την σχέση : $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\Re$. ΘΕΜΑ Γ (2016)

Λύση :

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στο $x_0=0$, το $g(0)=0$, δηλ. $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\Re$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

Είναι : $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow |f(x)|=|g(x)| \underset{\Gamma 1.}{\overset{g(x)\geq 0}{\Leftrightarrow}} |f(x)|=g(x)$

- Για $x=0$ είναι : $|f(0)|=g(0)\Leftrightarrow |f(0)|=0\Leftrightarrow f(0)=0$
- Για $x>0$ είναι : $f^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$
  - Αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)$ (1)
  - Αν $f(x)<0$ τότε $f(x)=-g(x)$ (2)
- Για $x<0$ είναι : $f^2(x)>0$ άρα $g(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και f συνεχής, άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$
  - Αν $f(x)>0$ τότε $f(x)=g(x)$ (3)
  - Αν $f(x)<0$ τότε $f(x)=-g(x)$ (4)

Τελικά :

1ον από (1), (3) $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

2ον από (1), (4) $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

3ον από (2), (3) $f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\geq 0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \end{cases}$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

4ον από (2), (4) $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, $x\in\Re$ αφού για $x=0$, $f(0)=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

117. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:A\to\Re$ με $x^2+f^2(x)=4$ για κάθε $x\in A$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
   iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-2,2).
   iv. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

118. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:A\to\Re$ με $f^2(x)=9-x^2$ για κάθε $x\in A$
   i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A
   ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
   iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (-3,3).
   iv. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

119. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $\left(f(x)-2\eta\mu x\right)\left(f(x)+2\eta\mu x\right)=4\sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$

120. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση :
$f^2(x)=2e^x f(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

121. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση : $\left(f(x)-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(f(x)+\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu^2 x$ για κάθε $x\in\Re$
   i. να αποδείξετε ότι $f^2(x)=1$
   ii. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον χ'χ
   iii. να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο
   iv. να βρείτε τον τύπο της f

122. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\Re\to\Re$ για τις οποίες ισχύει ότι : $f^2(x)+2x=x^2+1$ για κάθε $x\in\Re$.

123. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύουν : $f^2(x)=1+2xf(x)$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=1$.

124. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με την ιδιότητα : $f^2(x)-1=2xf(x)$ για κάθε $x\in\Re$.
   i. να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x) -x διατηρεί σταθερό πρόσημο
   ii. αν f(0)=1, τότε
   α. να βρείτε τον τύπο της f β. να υπολογίσετε το όριο A= $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf(x)\right)$

125. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)-2xf(x)=5$ για κάθε $x\in\Re$. Επίσης η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο M(2,-1).
   i. Να αποδείξετε ότι η $f(x)<0$ για κάθε $x\in\Re$.
   ii. Να βρείτε τον τύπο της f iii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

126. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re \to \Re^*$ για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)-6f(x)+5=x^4+4x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε :

i. την τιμή f(1) ii. τον τύπο της f iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : $f(x)$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΚΑΙ $f(x)\neq 0$

Όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό. Αυτή η διαπίστωση μας βοηθάει να βρούμε τον τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη σχέση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

127. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[-2,4]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-2,4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5).

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)+16=x^2-2f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4)

ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3+5x^2-3\right)$

Λύση :

i. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(-1,-5), άρα $f(-1)=-5$
Επίσης η f είναι συνεχής στο $[-2,4]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[-2,4]$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-2,4]$. Όμως $f(-1)=-5<0$, άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-2,4]$.

Έστω $g(x)=xf(x)+2f(x)-x^2+16$ με $x\in[-2,4]$, θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4).
Θ.Bolzano για τη $g(x)$ στο $[-2,4]$

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[-2,4]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(-2)=-2f(-2)+2f(-2)-4+16=12>0$
  $g(4)=4f(4)+2f(4)-16+16=6f(4)<0$ καθώς $f(x)<0$ για κάθε $x\in[-2,4]$
  Άρα $g(-2)\cdot g(4)<0$. Οπότε από Θ.Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2,4).

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3+5x^2-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(\pi)x^3\right)=+\infty$ καθώς $f(\pi)<0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

128. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της f και $f(2)<0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3^-}e^{\frac{1}{f(x)}}$.

Λύση :
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(1,3)$. Επιπλέον το $2\in(1,3)$ και $f(2)<0$, άρα $f(x)<0$, για κάθε $x\in(1,3)$.

Στο όριο $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$, θέτω $\dfrac{1}{f(x)} = y$. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} f(3)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο 3^-, έτσι : $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$. Τελικά $\lim\limits_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}} = \lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

129. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-1}+\dfrac{f(x)}{x-2}=2010$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

130. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε : $\dfrac{\eta\mu\xi}{f(\xi)}=\dfrac{1}{\xi-\alpha}+\dfrac{1}{\xi-\beta}$.

131. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)}{\sqrt{x+3}-2}=8$.
    i. Να βρείτε την τιμή f(1).
    ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(2)x^3-2x^2+3x-5\right)$.

132. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)+\eta\mu^2 3x}{\sqrt{x^2+4}-2}=16$.
    i. Να βρείτε την τιμή f(0)
    ii. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(2010)x^3-3x^2+2x-1\right)$

133. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,4]$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2,5).
    i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x)-16=-x^2+f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,4).
    ii. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(3)x^5-2x^3+5x^2-1\right)$.

134. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf(x)=(x^2-4)e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (-2,2).

135. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $x^3 f^2(x)-2x^5 f(x)=-x^2+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
    i. Να βρείτε το f(1)
    ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

136. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\neq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(3,2). Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)<x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. ii. υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f(\xi)=1$.

137. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν : $f(2007)+f(2006)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

138. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu 3x}{\sqrt{x+1}-1}=2$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδικές ρίζες τις -1 και 3. Να βρείτε :

i. Την τιμή $f(0)$.

ii. Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f(e)\ln x\right)$.

iii. Το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-3}+f(1)x\right)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Για να βρούμε το σύνολο τιμών f(Δ) μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ=(α,β) κάνω τα εξής :

- Διαπιστώνω ότι η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ=(α,β)
- Βρίσκω τα όρια : $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$ οπότε :
  - ✓ f(Δ)=(A,B) , αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή
  - ✓ f(Δ)=(B,A) , αν η f είναι γνησίως φθίνουσα

Αν κάποιο από τα άκρα του Δ είναι κλειστό, τότε και το αντίστοιχο του f(Δ) θα είναι κλειστό.

ΜΟΡΦΗ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ	ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΤΗΣ f	ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΤΗΣ f
[α,β]	Γνησίως Αύξουσα	$\left[f(\alpha),f(\beta)\right]$
[α,β]	Γνησίως Φθίνουσα	$\left[f(\beta),f(\alpha)\right]$
(α,β]	Γνησίως Αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),f(\beta)\right]$
(α,β]	Γνησίως Φθίνουσα	$\left[f(\beta),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$
[α,β)	Γνησίως Αύξουσα	$\left[f(\alpha),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
[α,β)	Γνησίως Φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),f(\alpha)\right]$
(α,β)	Γνησίως Αύξουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x),\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)\right)$
(α,β)	Γνησίως Φθίνουσα	$\left(\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x),\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)\right)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-e^{x^2+1}-\ln x$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση : Πρέπει $1-x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$ και $x>0$ άρα $A_f=(0,1]$

$A_f=(0,1]$, έστω $x_1,x_2\in A_f=(0,1]$ με :

$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \Rightarrow 1-x_1>1-x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1}>\sqrt{1-x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \overset{x>0}{\Rightarrow} x_1^2<x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1 \Rightarrow e^{x_1^2+1}<e^{x_2^2+1} \Rightarrow -e^{x_1^2+1}>-e^{x_2^2+1}$ (2)

$x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Rightarrow -\ln x_1>-\ln x_2$ (3), προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2) και (3) και έχω: $\sqrt{1-x_1}-e^{x_1^2+1}-\ln x_1>\sqrt{1-x_2}-e^{x_2^2+1}-\ln x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_f=(0,1]$ άρα $f(A)=[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x))$

$f(1)=-e^2$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{1-x}-e^{x^2+1}-\ln x)\overset{1-e-(-\infty)}{=\!=\!=\!=\!=}+\infty$ άρα $f(A)=[-e^2,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x^2+e^x$.
   i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

141. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5-\sqrt{x-1}-\ln x$.
   i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}$.
   i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
   ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
   iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
.

143. Να βρεθεί το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα.
   i. $f(x)=3-2x$ στο [-1,2]
   ii. $f(x)=x^2+\ln x-1$ στο [1,e]
   iii. $f(x)=e^{-x}-2x+1$ στο [0,1)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΓΙΑ Ν.Δ.Ο. Η ΕΞΙΣΩΣΗ f(x)=0 ΕΧΕΙ ΜΙΑ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΡΙΖΑ

1[ος] Τρόπος Με προφανή ρίζα.
2[ος] Τρόπος Αν ζητείται να δείξω ότι η f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) τότε εφαρμόζω το Θ.Bolzano για την f.
Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=\kappa$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ ή $h(x)=f(x)-\kappa$ αντίστοιχα και εφαρμόζω Θ.Bolzano στην h.
3[ος] Τρόπος Με τη βοήθεια του συνόλου τιμών. Αν το $0\in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Γενικότερα αν το $\kappa\in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση f(x)=κ , $\kappa\in\Re$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.
Υποπερίπτωση : Αν θέλω να δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα θεωρώ νέα συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ και βρίσκω το $h(\Delta)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΓΙΑ Ν.Δ.Ο. Η ΕΞΙΣΩΣΗ f(x)=0 ΕΧΕΙ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ

1[ο] Βήμα δείχνω ότι η f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα με έναν από τους παραπάνω τρόπους
2[ο] Βήμα δείχνω ότι η f(x)=0 έχει το πολύ μια ρίζα (συνήθως με μονοτονία) οπότε συμπεραίνω ότι έχει ακριβώς μια ρίζα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

144. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-1)+e^{x-2}=1$ έχει μια μόνο ρίζα. Στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή.

Λύση :

$\ln(x-1)+e^{x-2}=1 \Leftrightarrow \ln(x-1)+e^{x-2}-1=0$, έστω $f(x)=\ln(x-1)+e^{x-2}-1$ με $A_f=(1,+\infty)$, θα δείξω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $A_f=(1,+\infty)$.

έστω $x_1,x_2\in A_f=(1,+\infty)$ με :

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1 \Rightarrow \ln(x_1-1)<\ln(x_2-1)$ (1)

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1-2<x_2-2 \Rightarrow e^{x_1-2}<e^{x_2-2} \Rightarrow e^{x_1-2}-1<e^{x_2-2}-1$ (2)

προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω: $\ln(x_1-1)+e^{x_1-2}-1<\ln(x_2-1)+e^{x_2-1}-1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_f=(1,+\infty)$ άρα $f(A)=(\lim_{x\to1^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x))$

$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(\ln(x-1)+e^{x-2}-1)=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln(x-1)+e^{x-2}-1)=+\infty$

άρα $f(A)=(-\infty,+\infty)=\Re$. Το $0\in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $A_f=(1,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδική.

Για να βρούμε τη ρίζα θα ψάξουμε να βρούμε την προφανή ρίζα. Παρατηρώ ότι για $x=2$, έχω $f(2)=\ln(2-1)+e^{2-2}-1=\ln1+1-1=0$, άρα η $x=2$ ρίζα της $f(x)=0$ και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα είναι και μοναδική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

145. (ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΘΕΜΑ) Αν η συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και 1-1, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1$
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+e^{x-1}=1$ έχει μια μόνο ρίζα.
   iv. Να βρεθεί η ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

147. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}-e^{-x}+x+1$
   i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια μόνο ρίζα.

148. Για κάθε $\kappa\in\Re$ δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=2x^3-\kappa x^2+10$
   i. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(-\infty,0]$ να βρείτε το f(Δ)
   ii. Για κάθε $\alpha\in(14,15)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha-5$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x}$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει μια ακριβώς θετική ρίζα.

150. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-\ln(9-x)$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e$ έχει μια ακριβώς ρίζα.

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\ln x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-\sqrt{x-1}-\ln x$
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$.
   i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
   ii. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε μόνο ένα σημείο.
   iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\sqrt{x}\cdot e^{x}=1+2012e^{x}$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

154. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.
   i. $f(x)=e^{x}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ii. $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΟΡΙΟ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f\left((\alpha,\beta)\right)=(\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\gamma$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=\delta$.

Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\Re$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα με $f\left((\alpha,\beta)\right)=(\gamma,\delta)$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=\delta$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=\gamma$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

155. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,1)$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x+2016}$.

Λύση :

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Re$, οπότε έχει σύνολο τιμών $f(\Re)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-\infty,1)$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$.

Τελικά : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+x^2}{x+2016}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+1\right)}{x\left(1+\dfrac{2016}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+1\right)}{1+\dfrac{2016}{x}}=\dfrac{-\infty(0+1)}{1+0}=-\infty$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

156. Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,0)$, να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{x-1}$.

157. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.
iii. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

158. Έστω $f:(0,+\infty)\to\Re$ μια συνάρτηση με $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+1$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
ii. Να δείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα.
iii. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

151. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-x+1}-x-2, x\le 1 \\ \ln x+x-3, x>1 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες.
iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)+2}{x-1}+\frac{f(\beta)+2}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2) για κάθε $\alpha,\beta\in\Re-\{1\}$.
iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x}+x, x\le 0 \\ e^{-x}-\ln(x+1), x>0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες ετερόσημες.
iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{x-1}+\frac{f(\beta)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2) για κάθε $\alpha,\beta\in\Re^*$.
iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\Re$.

153. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x+1)+\eta\mu\alpha=\ln x+\alpha$ έχει μια ακριβώς λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$ για κάθε θετικό αριθμό α.

154. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\gamma\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\delta\in\Re$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0>0$ τέτοιος ώστε να ισχύει : $f(x_0)+e^{x_0+1}+\ln x_0=1$

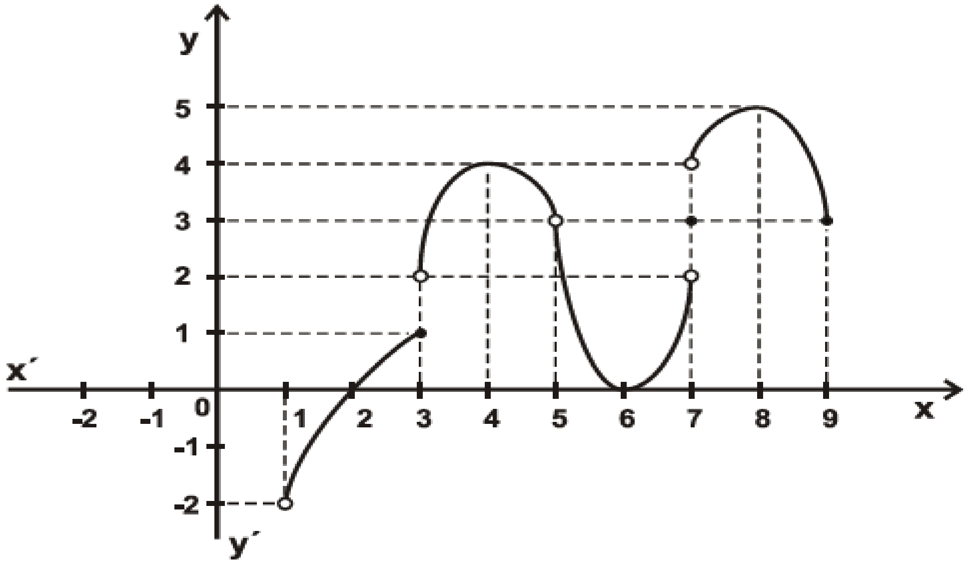
155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x}+\ln x+x-1$.

i. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\Re$ η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μια μόνο ρίζα.
iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=e$
iv. Να βρείτε το $\lambda\in\Re$ ώστε να ισχύει : $e^{\lambda^2+1}-e^{2\lambda}=\ln(2\lambda)-\ln(\lambda^2+1)-\lambda^2+2\lambda-1$.

156. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $xf(x)-x^2=\alpha x+\beta-2f(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-2,3)$.

i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\Re$.
ii. Να βρείτε τον τύπο της f.
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0^2+1$.

157. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

α) $\lim_{x\to 1} f(x)$ β) $\lim_{x\to 3} f(x)$ γ) $\lim_{x\to 5} f(x)$ δ) $\lim_{x\to 7} f(x)$ ε) $\lim_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

α) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

iv. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. ***(ΘΕΜΑ Β ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2016)***

158. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[1,9]\to \Re$ για την οποία ισχύει ότι :

- $f(1)\cdot f(3)\cdot f(9)=27$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[1,9]$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)>0$ για κάθε $x\in[1,9]$.

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[1,9]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=3$.

iii. η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1,9]$.

159. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-e^{3x}-x^3+1$.

i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{f(x)}$.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της.

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{-e^{3x}-x^3-2015}=1$, έχει μοναδική ρίζα.

v. Αν για τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\Re$ ισχύει : $e^{3g(x)}+g^3(x)=x^3e^6+(\ln x+2)^3$, για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι ο τύπος της g είναι $g(x)=\ln x+2$ και να βρεθεί η αντίστροφη της. ***(ΘΕΜΑ Β ΟΕΦΕ 2016 Α΄ΦΑΣΗ)***

160. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ με τύπο : $f(x)=2x^4+3\ln x+1$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\Re$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα.
iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda>0$ για τον οποίο ισχύει : $\lambda^4+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ln\frac{1}{\lambda}$. ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

161. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x^2}-e$, $x\in(0,+\infty)$. Να βρείτε :

i. Το πρόσημο της τιμής $f\left(\frac{1}{100}\right)$.
ii. Το σύνολο τιμών της f.
iii. Να αποδείξετε ότι : $f(0{,}01)\cdot f\left(\sqrt[3]{2006}\right)>f(0{,}01)\cdot f\left(\sqrt[3]{2007}\right)$
iv. Να συγκρίνετε τους θετικούς αριθμούς α και β αν ισχύει η ισότητα : $e^{\alpha^2}+\ln\alpha=e^{\beta^2}+\ln\beta$.

162. Δίνονται οι συνεχείς στο $\Re$ συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν :

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $\mathrm{A}(2,-1)$
- $\rho_1=-1$ και $\rho_2=5$ είναι δυο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$
ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,5)$
iii. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(3)x^4+2x^2+1}{g(2)x^3+5}=-\infty$ ***(ΘΕΜΑ Β study4exams)***

163. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)=\alpha^{2x}+2\alpha^x+1$ για κάθε $x\in\Re$, $\alpha\in\Re^*$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\Re$.
ii. Αν $f(0)=-2$ να βρείτε τον τύπο της f.
iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha<2$.
iv. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2f(x)-3^x}{3\cdot 2^x+4\cdot 3^x}$, $\alpha>3$. ***(ΘΕΜΑ Γ study4exams)***

164. Δίνεται η συνεχής στο 0 συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν :

- $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x,y\in\Re$ (1)
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$
ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$
iii. Να αποδείξετε ότι $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\in\Re$
iv. Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική ρίζα το 0 τότε να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x\cdot y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

165. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $x^4+1\le 4f(x)\le x^4+2$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι : $\frac{1}{4}\le f(0)\le\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}\le f(1)\le\frac{3}{4}$

ii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x\to 0}\left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

iii. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x\to 0}\frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right)+4\eta\mu 3x}{2x^2+3\eta\mu x}$

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)-\xi=0$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

166. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x<0\\ \lambda\quad, & x=0\\ \sqrt{8x^2+x+16}-3x, & x>0\end{cases}$

i. Να βρείτε τα κ,λ.

ii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

167. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύουν :

- $|3\eta\mu x-2xf(x)|\le\frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x\in\Re$.
- $4f(x)+3f(x+1)=2x^2-2016$, για κάθε $x\in\Re$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

ii. Να βρείτε το $f(1)$

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

(ΘΕΜΑ Γ study4exams)

168. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to\Re$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση : $f^3(x)+f(x)=x+2$ (1) για κάθε $x\in[0,8]$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. $f\left(\frac{23}{8}\right)=\frac{3}{2}$

iii. Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

iv. Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συνταγμένες του.

(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2014)

169. Έστω η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση : $f^2(x) = 2xf(x) - x^2 f(2-x)$ για κάθε $x \in \Re$ με $f(2) = 0$.
   i. Να αποδείξετε ότι $[f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2-x)]$ για κάθε $x \in \Re$.
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \le 1$ για κάθε $x \in \Re$.
   iii. Αν η C_f έχει με τον άξονα x΄x δυο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για $x = 1$ η f παίρνει μέγιστη τιμή $f(1) = 1$. ***(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2008)***

170. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$, με $f(0) = 2$ η οποία για κάθε $x \in \Re$ ικανοποιεί τη σχέση : $f\left(f(x)\right) + 4f(x) = 6 - x^4$ (1)
   i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.
   ii. Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$
   iii. Αν $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} f\left(f(x)\right)$
   iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)\right) + 1 = 0$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. ***(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2010)***

171. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ η οποία για κάθε $x \in \Re$ ικανοποιεί τη σχέση : $f^2(x) = x^6$.
   i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
   ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
   iii. Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$
   iv. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
   v. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}. ***(ΘΕΜΑ Γ Ε.Μ.Ε 2010)***

172. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύει :

$f^2(x) + 2xf(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x - x^2$, για κάθε $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, με $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{6}$.
   i. Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x - x$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   ii. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x} - 1, & x < 0 \end{cases}$, με $\kappa \in \Re$. Να βρείτε την παράμετρο κ, ώστε η g να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
   iii. Για $\kappa = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.
   iv. Για $\kappa = 2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι 1-1.

(ΘΕΜΑ Γ Ο.Ε.Φ.Ε. 2016 ΦΑΣΗ Α΄)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ 1^ΟΥ^ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2021

➢ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α,Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$.
2) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
3)Μία συνάρτηση f : A $\rightarrow$ IR είναι συνάρτηση 1 – 1,αν και μόνο αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 $\in$ A ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
4) Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις *fog* και *gof*, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
5) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς
την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.
6) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
7) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
8) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.
9) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x \in \Re$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.
10) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in$A (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν : $f(x) < f(x_o)$ για κάθε x∈A.
11) Μια συνάρτηση f : A → IR είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
12) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx΄) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.
13) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.
14) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $\mathrm{h} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})$, τότε ορίζεται και η $(\mathrm{h} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{f}$ και ισχύει $\mathrm{h} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{f})$ = $(\mathrm{h} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{f}$.
15) Αν μια συνάρτηση f:A→ IR είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) = \mathrm{x}\,,\ \mathrm{x} \in \mathrm{A} \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y)) = y\,,\ \ \mathrm{y} \in \mathrm{f}(\mathrm{A})$$

16) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
17) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in$A, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x∈A
18) Η συνάρτηση f είναι 1 – 1 , αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
19) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof
20) Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.
21) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.
22) Μια συνάρτηση f:A→ $\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in$A ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
23) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

24) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
25) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1 – 1 στο διάστημα αυτό.
26) Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
27) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης – f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f.
28) Αν μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
29) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.
30) Αν η συνάρτηση $f : A \to R$ είναι 1 – 1 τότε ισχύει : $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$
31) Αν η f είναι 1-1 και το σημείο Μ (α, β) ανήκει στην γραφική παράσταση C της f , τότε το Μ'(β, α) θα ανήκει στην γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως.

➢ ΟΡΙΑ

32) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.
33) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
34) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)+\lim_{x\to x_o} g(x)$$

35) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o , τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)-\lim_{x\to x_o} g(x)$$

36) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad , \quad \text{εφόσον} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0 .$$

37) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \in \Re$ **, αν και μόνο αν** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lambda$ **.**
38) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0, με $k \in IN$ και $k \ge 2$.
39) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)$ και $\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\right)$.
40) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_o, τότε :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$$

41) Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = -\infty$.
42) Αν υπάρχει στο $\Re$ το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in IR$, τότε : $\lim_{x\to x_o}\left(k\,f(x)\right) = k\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\right)$ για κάθε σταθερά $k \in IR$.
43) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

44) Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_0 \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

45) Αν α > 1 τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

46) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in R$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

47) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$

48) Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

49) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

50) Ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

51) Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

52) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

53) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathrm{N}$.

54) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0, και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

55) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

56) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

57) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

58) Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$

59) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

60) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει: $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = \alpha_0$

61) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f : \Re \to \Re$ και $g : \Re \to \Re$, αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

62) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in R$

63) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

64) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$

65) Αν είναι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

66) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

➢ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

67) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.
68) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (α, β)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(α)\cdot f(β)<0$.
69) Αν f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α)< 0 και υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε f(ξ)=0, τότε κατ'ανάγκη f(β)> 0.
70) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x∈Δ ή είναι αρνητική για κάθε x∈Δ, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
71) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
72) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 .
73) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
74) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου Α= $\lim_{x\to α^+} f(x)$ και Β= $\lim_{x\to β^-} f(x)$.
75) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.
76) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
77) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A = \lim_{x\to α^+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to β^-} f(x)$.
78) Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και Μ η μέγιστη τιμή της.
79) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
80) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.
81) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ ΑΠΟ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2000 – 2020

1$^{\text{Ο}}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΕΛ. 173

1)Σ 2)Λ 3)Λ 4)Λ 5)Σ 6)Λ 7)Σ 8)Λ 9)Σ 10)Λ 11)Σ 12)Σ 13)Σ 14)Σ 15)Σ 16)Σ 17)Σ 18)Σ 19)Λ 20)Σ 21)Σ 22)Σ 23)Σ 24)Σ 25)Σ 26)Σ 27)Σ 28)Λ 29)Λ 30)Σ 31)Σ 32)Σ 33)Σ 34)Σ 35)Λ 36)Σ 37)Σ 38)Σ 39)Λ 40)Λ 41)Λ 42)Σ 43)Σ 44)Λ 45)Σ 46)Σ 47)Σ 48)Λ 49)Λ 50)Λ 51)Σ 52)Σ 53)Λ 54)Σ 55)Λ 56)Σ 57)Λ 58)Λ 59)Λ 60)Λ 61)Λ 62)Σ 63)Λ 64)Σ 65)Σ 66)Λ 67)Λ 68)Λ 69)Λ 70)Σ 71)Σ 72)Λ 73)Λ 74)Σ 75)Σ 76)Σ 77)Λ 78)Σ 79)Σ 80)Σ 81)Σ

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ & ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΒΑΣΙΜΕΝΑ ΣΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ ΓΙΑ ΤΟ ΘΕΜΑ Α΄

1. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (Μονάδες 3)

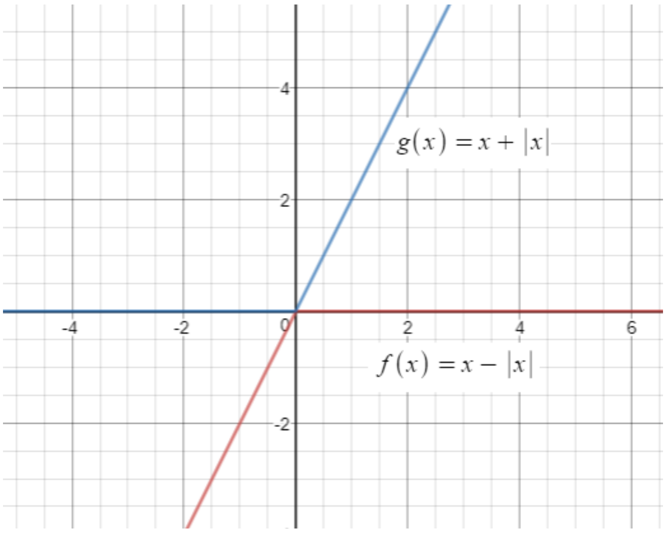
Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x-|x|$, $x\in\Re$ και $g(x)=x+|x|$, $x\in\Re$. Έχουμε λοιπόν ότι :

$f(x)\cdot g(x)=\left(x-|x|\right)\cdot\left(x+|x|\right)=x^2-|x|^2=x^2-x^2=0$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι παραπάνω συναρτήσεις και οπτικοποιείται το αποτέλεσμα :



2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν f,g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α,Β και για κάθε $\mathrm{x}\in\Gamma$ ισχύει $f(\mathrm{x})=\mathrm{g}(\mathrm{x})$ τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Α

β.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{x^2+x}{x}$ που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα A=R-{1} και B=R-{0} αντίστοιχα, είναι ίσες στο σύνολο Γ= R-{0,1}, αφού για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει ότι f(x)=g(x)=x+1

3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν f, g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $g \circ f = f \circ g$».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$, ενώ η g το $D_g = [0, +\infty)$.

Για να ορίζεται η παράσταση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ πρέπει : $x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$ ή , ισοδύναμα,

$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$, δηλαδή πρέπει $x \geq 1$. Επομένως, ορίζεται η $g \circ f$ και είναι : $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}$, $D_{g \circ f} = [1, +\infty)$

Για να ορίζεται η παράσταση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει : $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$ ή, ισοδύναμα,

$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$, δηλαδή πρέπει $x > 0$. Επομένως, ορίζεται η $f \circ g$ και είναι : $(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}$, $D_{f \circ g} = (0, +\infty)$. Τελικά παρατηρούμε ότι $gof \neq fog$.

4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Έστω f, g, h τρεις συναρτήσεις. Αν ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $h \circ (g \circ f) = (g \circ f) \circ h$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Είναι ψευδής καθώς στην σύνθεση δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα όπως εξηγήθηκε στο **2.** αλλά η προσεταιριστική ιδιότητα $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2018)***
«Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Α και "1-1" τότε είναι και γνησίως μονότονη στο Α».

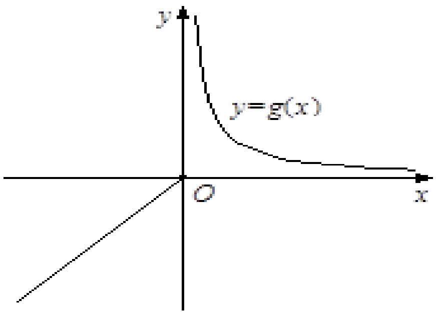
α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι "1-1" αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x & , \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα :



6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=l\neq 0$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-l$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0=0$, αφού:

— για $x<0$ είναι $f(x)=\dfrac{-x}{x}=-1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$, ενώ

— για $x>0$ είναι $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,

και έτσι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Ενώ η συνάρτηση $|f(x)|=\left|\dfrac{|x|}{x}\right|=\dfrac{|x|}{|x|}=1$ έχει όριο στο $x_0=0$ και είναι $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = l \neq 0$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -l$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:

— για $x < 0$ είναι $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$, ενώ

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$,

και έτσι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

ενώ η συνάρτηση $f^2(x) = \left(\dfrac{|x|}{x}\right)^2 = \dfrac{|x|^2}{x^2} = 1$ έχει όριο στο $x_0 = 0$ και είναι

$\lim\limits_{x\to 0} f^2(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$.

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, είναι ανεξάρτητο των άκρων α,β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι η συνάρτηση f είναι ορισμένη»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Α

β.

Για παράδειγμα αν θέλουμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0=0$ περιοριζόμαστε στο $(-1, 0)\cup(0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο παίρνει την μορφή $f(x) = \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1$, και επομένως το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

9. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2020 Π.Σ.)***

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2\nu+1}$ με $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^{2\nu+1})=0$. Όμως το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει καθώς $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$.

10. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2018 Επαναληπτικές)***

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\Re$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=+\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

11. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : ***(Πανελλήνιες 2019)***

«Για κάθε συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0\in\Re$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

<u>Απάντηση :</u>

α. Ψ

β. Ο ισχυρισμός θα ήταν σωστός, αν η f ήταν συνεχής στο x_0. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \alpha\nu\ \ x\neq 1\\ 3, & \alpha\nu\ x=1\end{cases}$. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=$ $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, ενώ $f(1)=3$.

12. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν δεν υπάρχει το όριο της στο x_0»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :
α. Α
β.

Για παράδειγμα: η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ 2-x, & x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2-x)=2$ οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

13. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
«Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το όριο της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της f στο x_0.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :
α. Α
β.

Για παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x\ne 1 \\ 3, & \text{αν } x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2, \quad \text{ενώ} \quad f(1)=3.$$

14. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα [α,β] αν :

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)f(\beta)>0$

τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f}(x_0)=0$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β.

Αν f(x)=ημx-συνx, $x\in[0, 2\pi]$ έχουμε f(0)=-1, f(2π)=-1, άρα f(0)f(2π)=1>0 δηλαδή η συνεχής f έχει στα άκρα του διαστήματος ομόσημες τιμές και η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0, 2π) αφού

f(x)=0⇔ ημx-συνx=0⇔ ημx=συνx⇔ εφx=1⇔ x=π/4 ή x=5π/4.

15. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(\mathrm{x})\neq 0$ για κάθε $\mathrm{x}\neq 0$, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Ψ

β.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο

$R^*=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R^*=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ αλλά δεν διατηρεί πρόσημο στο σύνολο αυτό αφού f(x)<0, για x<0 και f(x)>0, x>0.

16. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίου ορισμού το [α,β] είναι το κλειστό διάστημα [m,M] όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α**, αν είναι Αληθής, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι Ψευδής. (Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (Μονάδες 3)

Απάντηση :

α. Α

β.

Αν f(x)=ημx, $x\in[0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο [-1, 1] αφού είναι συνεχής στο [0, 2π] με ελάχιστη τιμή m=-1 και μέγιστη τιμή M=1.

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

28. ΟΡΙΣΜΟΣ (2004, 2009)
Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση :

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο** x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο** x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Σχόλια :

α) Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=\ f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.

β) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:
Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια :
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα

29. Α) Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

Β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$. **(2000)**

Απάντηση :

Α) Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός $λ$, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία $ε$ που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ$.

Β) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$

Σχόλια :

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης $ε$ της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι $\boxed{\lambda = f'(x_0)}$, οπότε η εξίσωση της *εφαπτομένης* $ε$ είναι : $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης $ε$ στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0**.

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι $\boldsymbol{\upsilon(t_0) = S'(t_0)}$.

30. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **(2000, 2003, 2007 Β΄, 2013 Β΄, 2017 Σ-Λ με εξήγηση)**

Απόδειξη :

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε θα είναι :

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλιο :

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1$.

(2017)

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο x_0,

Ισχύει όμως ότι : Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 1 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ

- Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0.

  Δηλ. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- Αν x_0 είναι σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f και η f δίνεται αριστερά του x_0 και δεξιά του x_0 με διαφορετικό τύπο (σε κλάδους), τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν, τα πλευρικά όρια :

$\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ =α όπου α πραγματικός αριθμός.

- ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΙΑ ΤΟ $f'(x_0)$

  Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0.

  Δηλ. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 2 : ΤΙ ΕΚΦΡΑΖΕΙ Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

- Το ***ρυθμό μεταβολής*** του y=f(x) ως προς x, όταν $x = x_0$.
- Το ***συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης ε*** της γραφικής παράστασης της f, στο σημεία επαφής Α($x_0, f(x_0)$) δηλαδή $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = f'(x_0)$.
- Την ***ταχύτητα*** $\upsilon(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση x(t), τη χρονική στιγμή t_0. Είναι $\upsilon(t_0) = x'(t_0)$
- Την ***επιτάχυνση*** $\alpha(t_0)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon(t)$, τη χρονική στιγμή t_0. Είναι $\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0)$.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ 3 : ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- Αν δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : Παράγωγος στο x_0 συνάρτησης απλού τύπου

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)=x^2+1$ στο σημείο $x_0=0$.

Λύση :

$f(x)=x^2+1$ άρα $D_f=\Re$.

Έχουμε : $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει $f'(0)=0$.

2) Να βρείτε αν υπάρχει την παράγωγο της $f(x)=\sqrt{x-2}$ στο σημείο $x_0=2$.

Λύση :

$f(x)=\sqrt{x-2}$ και $D_f=[2,+\infty)$.

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}-0}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}}{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{(x-2)\cdot\sqrt{x-2}}=$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\overset{\frac{1}{0^+}}{=}+\infty$.

Το παραπάνω όριο υπάρχει, αλλά δεν είναι πραγματικός αριθμός, άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : Παράγωγος και συνέχεια – παράγωγος στο x_0 συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0. Αν όμως δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

3) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0\\ x^3, x\geq 0\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 =0.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3)=0$

$f(0)=0^3=0$ Άρα η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$ και άρα η $f(x)$ δεν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-x+2, x\le 1 \\ 2x^2-3x+3, x>1 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-x+2)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x^2-3x+3)=2$

$f(1)=1^2-1+2=2$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x+2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x(x-1)}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x+3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2x-1)}{x-1}=1$$

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=1$

5) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu(x-1), x\le 1 \\ \sqrt{x+3}-2, x>1 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(\eta\mu(x-1))=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\sqrt{x+3}-2)=0$

$f(1)=\eta\mu(1-1)=0$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\underset{\substack{\text{Όταν: } x\to 1\\ \text{τότε: } u\to 0}}{\overset{\substack{\text{Θέτω:}\\ x-1=u}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{4}$$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. (Παρατηρώ δηλαδή ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 αλλά να μην είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό)

6) Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $f(x)=(x-\eta\mu x)g(x)$ να βρεθεί η τιμή $f'(0)$.

Λύση :

Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)\in\mathbb{R}$.

Επίσης : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)g(x)-(0-0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)g(x)}{x}=$
$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)g(x)\right]=(1-1)g(0)=0$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : Παράγωγος στο x_0 συνάρτησης με απόλυτη τιμή

Αν έχουμε συνάρτηση που περιέχει απόλυτες τιμές και θέλουμε να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0, βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που περιέχονται στην απόλυτη τιμή (κατασκευάζοντας πίνακα προσήμων) και με βάση τα πρόσημα βγάζουμε τις απόλυτες τιμές. Αν χρειαστεί γράφουμε τη συνάρτηση με πολλαπλό τύπο και κάνουμε χρήση πλευρικών ορίων τόσο για την συνέχεια όσο και για την παραγωγισιμότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

7) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=|x-1|+3$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση : Έχω : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

Άρα η $f(x)=|x-1|+3$ γίνεται : $f(x)=\begin{cases} x-1+3, x\geq 1 \\ -(x-1)+3, x<1\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases} x+2, x\geq 1 \\ -x+4, x<1\end{cases}$

Θα εξετάσω πρώτα αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-x+4)=3$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+2)=3$

$f(1)=3$ Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+4-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$

Άρα η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : Καθορισμός παραμέτρων ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Βρίσκουμε αρχικά τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων (π.χ. α,β) ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0 (1). Έπειτα βρίσκουμε τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l_2$ και ζητάμε να ισχύει $l_1=l_2$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προσδιορίζουμε τις παραμέτρους α,β.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

8) Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, x\le 1 \\ 2\alpha x+2\beta-4, 1<x \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

- Αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Δηλαδή ισχύει : $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

$f(1)=1+\alpha+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+\alpha x+\beta)=1+\alpha+\beta$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2\alpha x+2\beta-4)=2\alpha+2\beta-4$

Άρα $1+\alpha+\beta=2\alpha+2\beta-4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=5-\alpha$ (1)

- Αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-(1+\alpha+\beta)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+\alpha x+\beta-1-\alpha-\beta}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+\alpha x-1-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1+\alpha x-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)+\alpha(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1+\alpha)}{x-1}=2+\alpha$ (2)

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\alpha x+2\beta-4-(1+\alpha+\beta)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\alpha x+2\beta-4-1-\alpha-\beta}{x-1}=$

$\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\alpha x+2(5-\alpha)-5-\alpha-5+\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\alpha x+10-2\alpha-10}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\alpha(x-1)}{x-1}=2\alpha$ (3)

Από (2) και (3) $2+\alpha=2\alpha \Leftrightarrow \alpha=2$ και λόγο της (1) $\beta=3$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : Προσδιορισμός $f'(x_0)$ από ανισοτική σχέση (κριτήριο παρεμβολής)

Αρχικά θέτουμε όπου x το x_0 και βρίσκουμε την τιμή $f(x_0)$. Έπειτα μορφοποιούμε την ανισότητα ώστε να έχουμε στη μέση $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και τέλος εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε το $f'(x_0)$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

9) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $2x^2+5x+3 \le f(x) \le 3x^2+3x+4$ να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$.

Λύση :

Για $x=1$ η σχέση γίνεται : $2+5+3 \le f(1) \le 3+3+4 \Leftrightarrow 10 \le f(1) \le 10$. Άρα $f(1)=10$. Η παράγωγος στη θέση $x_0=1$ είναι : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{x-1}$

Άρα έχω : $2x^2+5x+3 \le f(x) \le 3x^2+3x+4 \Leftrightarrow 2x^2+5x-7 \le f(x)-10 \le 3x^2+3x-6$ (1).

• Για $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$: $\frac{2x^2+5x-7}{x-1} \le \frac{f(x)-10}{x-1} \le \frac{3x^2+3x-6}{x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2+5x-7}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(2x+7)}{x-1}=9$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x^2+3x-6}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(3x+6)}{x-1}=9$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχω :

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-10}{x-1}=9$ (2)

• Για $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$: $\frac{2x^2+5x-7}{x-1} \ge \frac{f(x)-10}{x-1} \ge \frac{3x^2+3x-6}{x-1}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x^2+5x-7}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(2x+7)}{x-1}=9$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x^2+3x-6}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(3x+6)}{x-1}=9$ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχω :

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-10}{x-1}=9$ (3). Άρα από (2) και (3) ισχύει : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-10}{x-1}=9$.

10) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ και ισχύει $f(0)=g(0)$ και $f(x)\ge g(x)+\sigma\upsilon\nu x-1+5x$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι : $f'(0)=g'(0)+5$.

Λύση :

Οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$, επομένως :

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ και $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$.

Επίσης για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1) $\overset{f(0)=g(0)}{\Leftrightarrow}$ $f(x)-f(0)\ge g(x)-g(0)+\sigma\upsilon\nu x-1+5x$ (2).

- Αν $x>0$ (κοντά στο 0^+), $(2)\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x}\geq \frac{g(x)-g(0)}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+5$

  Άρα : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+5\right)\Rightarrow f'(0)\geq g'(0)+5$ (3)

- Αν $x<0$ (κοντά στο 0^-), $(2)\Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x}\leq \frac{g(x)-g(0)}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+5$

  Άρα : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+5\right)\Rightarrow f'(0)\leq g'(0)+5$ (4)

  Από (3) και (4) $f'(0)=g'(0)+5$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : Προσδιορισμός ορίου από $f'(x_0)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(2)=1$ και $f'(2)=-3$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-x+1}{x^2-2x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f(x)}{x^2-4}$ iii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(x)-2}{x-2}$ iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf\left(\frac{2x+1}{x}\right)-x\right]$

Λύση :

Έχουμε : $f'(2)=-3\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-3\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=-3$, (1)

i. Έστω $g(x)=\frac{f(x)-1}{x-2}$, $x\neq 2$, με $\lim\limits_{x\to 2}g(x)\overset{(1)}{=}-3$.

Επομένως : $f(x)=(x-2)g(x)+1$ κοντά στο 2.

Άρα : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)g(x)+1-x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)g(x)-(x-2)}{x^2-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(g(x)-1)}{x(x-2)}==\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x}=\frac{-3-1}{2}=-2$.

ii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)\left(f(x)-1\right)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}\cdot\frac{f(x)}{x+2}\overset{(1)}{=}-3\cdot\frac{f(2)}{2+2}=-\frac{3}{4}$,

καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, άρα η f είναι συνεχής στο 2, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=1$.

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(x)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{xf(x)-x+x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x\left(f(x)-1\right)+x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left[x\cdot\frac{\left(f(x)-1\right)}{x-2}+1\right]\overset{(1)}{=}$

$=2\cdot(-3)+1=-5$.

iv. Θέτω $u=\dfrac{2x+1}{x}\Leftrightarrow u=2+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=u-2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{u-2}$, είναι : $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$,

άρα : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xf\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)-x\right]=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{u-2}f(u)-\dfrac{1}{u-2}\right)==\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(u)-1}{u-2}\overset{(1)}{=}-3$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : Προσδιορισμός $f'(x_0)$ από γνωστό όριο

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}=4$.

i. Να βρείτε το $f(1)$ ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε το $f'(1)$.

Λύση :

i. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=1$ άρα : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ (1)

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}$ κοντά στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to1}g(x)=4$

Έχω : $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}\Leftrightarrow g(x)(\sqrt{x}-1)=f(x)-x\Leftrightarrow f(x)=g(x)(\sqrt{x}-1)+x$ κοντά στο 1.

Άρα : $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}[g(x)(\sqrt{x}-1)+x]=1$, άρα από (1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$.

ii. Για να δείξω ότι η f είναι παρ/μη στο $x_0=1$, αρκεί να δείξω ότι το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Έχω : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)+x-1}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g(x)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}+\dfrac{x-1}{x-1}\right]=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g(x)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}+1\right]=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{g(x)}{(\sqrt{x}+1)}+1\right]=\dfrac{4}{2}+1=3\in\Re$, άρα η f είναι παρ/μη στο $x_0=1$ και $f'(1)=3$.

13) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να βρείτε το $f'(1)$.

Λύση : Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα είναι και συνεχής στο $x_0=1$ δηλαδή :

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ (1). Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}$ κοντά στο 1 με $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\dfrac{1}{2}$.

Λύνοντας ως προς $f(x)$ έχω :

$f(x)-x^2+3x-3=g(x)(x^2-1)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x^2-1)+x^2-3x+3$ κοντά στο 1 άρα :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)(x^2-1)+x^2-3x+3\right]=\frac{1}{2}\cdot 0+1-3+3=1$ άρα από (1) :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow f(1)=1$

Επίσης : η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα : $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$. Το όριο που δίνεται γράφεται : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1-x^2+3x-2}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1-(x^2-3x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+1)}\right]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)=0$$

14) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=5$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(4x+1)-2}{x-1}=8$. Να δείξετε ότι $f(5)=2$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=5$ με $f'(5)=2$.

Λύση :

Έχουμε : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(4x+1)-2}{x-1}=8 \overset{\substack{\theta\acute{\epsilon}\tau\omega \\ 4x+1=u\Leftrightarrow x=\frac{u-1}{4}}}{\underset{\substack{x\to 1\\ u\to 5}}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{\frac{u-1}{4}-1}=8\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{\frac{u-5}{4}}=8\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4\lim_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{u-5}=8\Leftrightarrow \lim_{u\to 5}\frac{f(u)-2}{u-5}=2\Leftrightarrow \lim_{x\to 5}\frac{f(x)-2}{x-5}=2 \quad (1)$$

Έστω : $g(x)=\frac{f(x)-2}{x-5}$, $x\neq 5$ και $\lim\limits_{x\to 5} g(x)=2$. Είναι : $f(x)=(x-5)g(x)+2$ κοντά στο 5

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=5$, άρα $f(5)=\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\left[(x-5)g(x)+2\right]=2$

Έτσι $(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-2}{x-5}=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=2\Leftrightarrow f'(5)=2$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : Ισοδύναμος ορισμός για το $f'(x_0)$

Μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0.

Δηλ. $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15) (Άσκηση 2 σελ. 220 Β΄ ομάδας σχολικού βιβλίου κατεύθυνσης)
Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$, για κάθε $h\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : i. $f(1)=2$ ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ότι $f'(1)=3$.

Λύση :

i. Για να βρω το $f(1)$, στη σχέση $f(1+h)=2+3h+3h^2+h^3$, θα βάλω όπου $h=0$ και έχω : $f(1)=2$

ii. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ αρκεί το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός. Έχω $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{2+3h+3h^2+h^3-2}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(3+3h+h^2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3\in\Re$. Άρα η f παρ/μη στο $x_0=1$ με $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=3$.

16) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-2h)}{h}=3f'(x_0)$.

Λύση :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Έχουμε : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-2h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-2h)}{h}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\overset{(*)}{=}f'(x_0)-(-2)f'(x_0)=3f'(x_0)$.

(*) είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}\underset{\substack{h\to 0\\ u\to 0}}{\overset{\substack{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega\\ -2h=u\Leftrightarrow h=-\frac{u}{2}}}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{-\frac{u}{2}}=-2\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=-2f'(x_0)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9 : Παράγωγος και συναρτησιακές σχέσεις.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

17) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Λύση :

i. Στη σχέση $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ θέτω για $x=0$ και έχω : $f^3(0)=-1 \Leftrightarrow f(0)=-1$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x}$

Όμως : $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1 \Leftrightarrow f^3(x)+1=x^3-3xf(x) \Leftrightarrow$

$(f(x)+1)\left(f^2(x)-f(x)+1\right)=x^3-3xf(x) \Leftrightarrow f(x)+1=\dfrac{x\left(x^2-3f(x)\right)}{f^2(x)-f(x)+1}$

καθώς η παράσταση $f^2(x)-f(x)+1$ είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$ με $\Delta=-3<0$ άρα $f^2(x)-f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x\left(x^2-3f(x)\right)}{f^2(x)-f(x)+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3f(x)}{f^2(x)-f(x)+1}=\frac{0-3f(0)}{f^2(0)-f(0)+1}=1$$

καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ άρα είναι και συνεχής στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=-1$.

18) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Λύση :

i. Στη σχέση $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ θέτω για $x=0$ και έχω : $f^3(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

ii. Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re$. Διαιρώ τη σχέση : $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ με $x^3\neq 0$ και έχουμε : $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+\dfrac{f(x)}{x}=2\dfrac{\eta\mu x}{x}$ άρα

παίρνοντας όριο έχουμε : $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^3+\dfrac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)\Leftrightarrow \lambda^3+\lambda=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^3+\lambda-2=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+2)=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \Leftrightarrow f'(0)=1$.

19) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)+1=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι : i. η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και ii. ότι $f'(1)=2$.

Λύση :

i. Για κάθε $x\in\Re$ έχουμε $f^3(x)+f(x)+1=x^2 \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=x^2-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-1}{f^2(x)+1}$ (1)

Είναι : $|f(x)| = \left|\dfrac{x^2-1}{f^2(x)+1}\right| = \dfrac{|x^2-1|}{f^2(x)+1} \le \dfrac{|x^2-1|}{1} = |x^2-1|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλ. $|f(x)| \le |x^2-1| \Leftrightarrow -|x^2-1| \le f(x) \le |x^2-1|$

Έτσι : $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1}\left(-|x^2-1|\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1}\left(|x^2-1|\right)=0 \end{matrix}\right\}$ από κριτήριο παρεμβολής : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

Επίσης : $f(1) = \dfrac{1^2-1}{f^2(1)+1} = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ii. $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{x^2-1}{f^2(x)+1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(f^2(x)+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{f^2(x)+1} = \dfrac{1+1}{f^2(1)+1} = 2$. (καθώς $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$)

20) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \alpha$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ (1) με $f(0) \ne 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0) = \alpha f(x_0)$ για κάθε $x_0 \ne 0$.

Λύση :

Για $x = y = 0$ είναι : $(1) \Leftrightarrow f(0) = f^2(0) \Leftrightarrow f(0)\left(f(0)-1\right) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$ καθώς $f(0) \ne 0$

Επίσης : $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)\cdot f(h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)\cdot\left(f(h)-1\right)}{h} =$

$= f(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f(x_0)\cdot f'(0) = f(x_0)\cdot\alpha$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

21) Αν $f(x) = 3x-2$, να βρείτε το $f'(2)$.

22) Αν $f(x) = x^2 + x$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 =1.

23) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-1|$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$. (Υποδ. για να βρούμε την παράγωγο σε ένα σημείο x_0 μιας συνάρτησης f που περιέχει απόλυτα, πρώτα βγάζουμε τα απόλυτα και η συνάρτηση γίνεται πολλαπλού τύπου)

24) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-2|$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 2$.

25) Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

i. $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$

ii. $f(x) = |x^2-3x|$, $x_0 = 1$

iii. $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & , \quad x<0 \\ x+1 & , \quad x \ge 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

26) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=2-x+x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0=0$.

27) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+3x, x<0 \\ x^5+15, x\geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. (Υποδ. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0. Αν όμως δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη)

28) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+3x, & x<0 \\ 2x+\eta\mu x, & x\geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

29) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ x-\eta\mu x, & x\geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

30) Να βρείτε τα α,β$\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta, & x>0 \\ \eta\mu x+(\beta-2)x+2\alpha-2, & x\leq 0 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

31) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=7$ και $f(7)=10$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

32) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

33) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot(\eta\mu x)^{2015}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

34) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=7$ να αποδείξετε :

i. $f(1)=0$
ii. $f'(1)=7$

35) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2-7x}{x^2-2x}=2$

i. Να βρείτε το $f(0)$
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$.
iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+\eta\mu x}{\sqrt{x+4}-2}$.

36) Αν μια συνάρτηση είναι f είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu 3x}{x^2-x}=2$.

i. Να βρείτε το $f(0)$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το $f'(0)$.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu x\cdot\eta\mu 5x}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

37) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$.

i. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

ii. Να δείξετε ότι $f'(0)=1$.

iii. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2}=3$. (Πανελλήνιες 2005)

38) Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει : $x^2+3x\le f(x)\le 2x^2-x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$.

39) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :
$\eta\mu^2 x-x^4\le xf(x)\le \eta\mu^2 x+x^4$ να αποδείξετε ότι :

i. $f(0)=0$ ii. $f'(0)=1$.

40) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$. Αν $f(3)=5$ και $f'(3)=2$ να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3f(x)-xf(3)}{x-3}$.

41) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(2x-5)-x}{x-3}=7$

i. να αποδείξετε ότι $f(1)=3$

ii. να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=4$

iii. να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{x}-1}$

42) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(0)=5$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(0)}{x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)-f(x)}{x}$

43) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(0)=2$. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(7x)-f(3x)}{x}$

44) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

ii. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$.

45) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 2, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+2f(x)+4=x^2$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε : i. το $f(2)$ και ii. το $f'(2)$.

46) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+8x\cdot\eta\mu x\cdot f(x)=x\cdot\eta\mu^2 3x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$

47) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy-2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=4$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

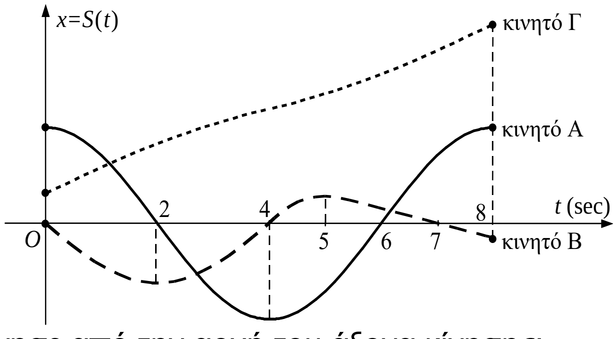
48) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 1. Αν επιπλέον η συνάρτηση : $g(x)=\begin{cases} f^3(x)+3f(x), & x\le 1 \\ f(x)-3, & x>1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1, τότε να βρείτε :

i. τα $f(1)$ και $f'(1)$

ii. το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf(x)-x^2+2}{x-1}$.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xg(x)+2x^2-1=2x^3-6x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

49) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0sec έως 8sec. Να βρείτε :



i. Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

ii. Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

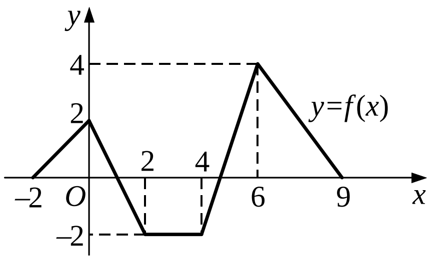
iii. Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t=2$sec, ποιο τη χρονική στιγμή $t=4$sec και ποιο τη χρονική στιγμή $t=5$sec;

iv. Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;

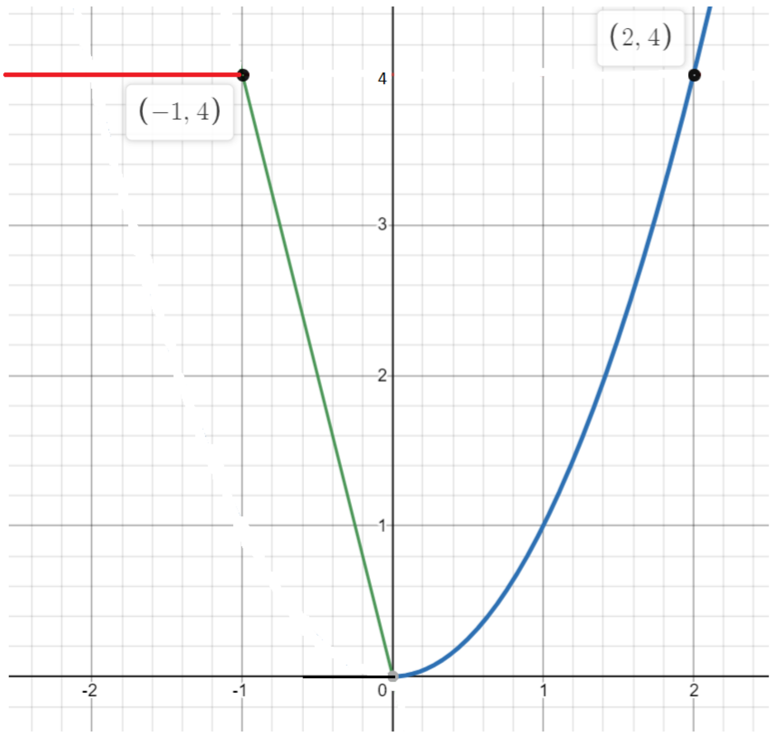
v. Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

vi. Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

50) Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



51) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



i. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}4 & , \ x<-1\\ -4x & , \ -1\le x\le 0\\ x^2 & , \ x\ge 0\end{cases}$.

ii. Να βρείτε την $f'(x)$ και να τη σχεδιάσετε.

iii. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)\cdot\left(f\left(1+\dfrac{2}{x}\right)-1\right)\right]$.

v. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0,1]$, τέτοιο ώστε :

$$5f(x_0)=2f\left(\frac{1}{e}\right)+3f\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

31. ΟΡΙΣΜΟΙ

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται :

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο A

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ **(2010 Β΄, 2013, 2020 Ν.Σ.)**

δ) Τι ονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και γενικά νιοστή παράγωγο μιας συνάρτησης f ;
(2020 Π.Σ. μόνο για την πρώτη παράγωγο)

Απάντηση :

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει: $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$.

δ) Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f' : A_1 \to R$$
$$x \to f'(x),$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της *f*** ή απλά **παράγωγος της *f***. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι". Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της *f*** και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της *f***, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \quad \nu \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

Παρατήρηση :

Ισχύει : $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ και $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$

Επίσης : $f'(x)=\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f(u)-f(x)}{u-x}$ και $f''(x)=\lim\limits_{u\to x}\dfrac{f'(u)-f'(x)}{u-x}$ $[x+h=u]$

32. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x)=0$

β) Αν $f(x)=x$, τότε $f'(x)=1$

γ) Αν $f(x)=x^{\nu}$, με $\nu\in N-\{0,1\}$, τότε $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$

δ) Αν $f(x)=\sqrt{x}$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$

(2005 Β΄)

Απόδειξη :

α) Για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

β) Για $x\neq x_0$ ισχύει ότι : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

γ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του R, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

Επομένως : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$,δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

δ) Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$, οπότε :

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Παρατήρηση : η $f(x)=\sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=[0,+\infty)$, όμως : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Σχόλια – Τύποι :

- Έστω συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή $\boxed{(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x$, δηλαδή $\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή $\boxed{(e^x)'=e^x}$
- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, δηλαδή $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

33. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος αθροίσματος)*
Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ **(2020 Π.Σ.)**

Απόδειξη :

Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$, δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Σημείωση :
Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε για κάθε $x\in \Delta$ ισχύει:

$$\boldsymbol{(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)}.$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, ..., f_k$, είναι παραγωγίσιμες στο *Δ*, τότε : $(f_1+f_2+...+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_k'(x)$.

Για παράδειγμα, $(\eta\mu x+x^2+e^x+3)'=(\eta\mu x)'+(x^2)'+(e^x)'+(3)'=\sigma\upsilon\nu x+2x+e^x$.

34. ΘΕΩΡΗΜΑ *(Παράγωγος γινομένου)*
Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση :

- Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει:

$\boxed{\boldsymbol{(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}}$.

Για παράδειγμα, $(e^x\ln x)'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x}, \quad x>0$.

- Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x))\cdot h(x)]'=(f(x)g(x))'\cdot h(x)+(f(x)g(x))\cdot h'(x)\\ &=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]h(x)+f(x)g(x)h'(x)\\ &=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Για παράδειγμα : $(\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x)'=(\sqrt{x})'\cdot\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot(\ln x)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{x}, \quad x>0.$$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in R$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε: $\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$

  Για παράδειγμα : $(6x^3)' = 6(x^3)' = 6 \cdot 3x^2 = 18x^2$.

35. <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> *(Παράγωγος πηλίκου)*

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

<u>Σημείωση :</u>

- Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε: $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}}$.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in N^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

<u>Απόδειξη</u>

Πράγματι, για κάθε $x \in \Re^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R - \{x | συνx = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{συν^2 x}$, δηλαδή $(εφx)' = \frac{1}{συν^2 x}$

<u>Απόδειξη:</u>

Πράγματι, για κάθε $x \in R - \{x | συνx = 0\}$ έχουμε:

$$(εφx)' = \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' = \frac{(ημx)'συνx - ημx(συνx)'}{συν^2 x} = \frac{συνxσυνx + ημxημx}{συν^2 x} = \frac{συν^2 x + ημ^2 x}{συν^2 x} = \frac{1}{συν^2 x}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = σφx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R - \{x | ημx = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{ημ^2 x}$, δηλαδή $(σφx)' = -\frac{1}{ημ^2 x}$

36. ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

Σχόλια :

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u=g(x)$, τότε $\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y=f(u)$ και $u=g(x)$, έχουμε τον τύπο $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας.**

37. ΘΕΩΡΗΜΑ

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ln\alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x\in R^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

(2008)

Απόδειξη :

α) Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$.

β) Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\ln\alpha$.

γ) Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως, $y'=(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

Α. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)$	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ $f'(x)$
$f(x)=c,\ c\in\Re$,	$f'(x)=(c)'=0$,
$f(x)=x$,	$f'(x)=(x)'=1$,
$f(x)=x^{\nu}$,	$f'(x)=(x^{\nu})'=\nu\cdot x^{\nu-1}$,
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\eta\mu x$	$f'(x)=(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$
$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
$f(x)=\varepsilon\varphi x$	$f'(x)=(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
$f(x)=\sigma\varphi x$	$f'(x)=(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=(e^x)'=e^x$
$f(x)=\alpha^x$	$f'(x)=(\alpha^x)'=\alpha^x\cdot\ln\alpha$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

Επίσης ισχύουν οι εξής κανόνες παραγώγισης :

- $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$
- $\left(cf(x)\right)'=cf'(x),\quad c\in\Re$
- $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=4x+5$

ii. $f(x)=x^2+5x+2013$

iii. $f(x)=7x^3+5x^2-3x+1$

iv. $f(x)=3e^x+9$

v. $f(x)=2\ln x+5x+\dfrac{1}{x}$

vi. $f(x)=3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x$

vii. $f(x)=2\sqrt{x}+3\ln x$

viii. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x>0$

Λύση :

i. $f'(x)=(4x+5)'=(4x)'+(5)'=4(x)'+0=4\cdot 1=4$

ii. $f'(x)=(x^2+5x+2013)'=(x^2)'+(5x)'+(2013)'=2x+5$

iii. $f'(x)=(7x^3+5x^2-3x+1)'=(7x^3)'+(5x^2)'-(3x)'+(1)'=3\cdot 7x^2+2\cdot 5x-3=21x^2+10x-3$

iv. $f'(x)=(3e^x+9)'=(3e^x)'+(9)'=3(e^x)'=3e^x$

v. $f'(x)=(2\ln x+5x+\dfrac{1}{x})'=(2\ln x)'+(5x)'+\left(\dfrac{1}{x}\right)'=2(\ln x)'+5-\dfrac{1}{x^2}=2\cdot\dfrac{1}{x}+5-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{x}+5-\dfrac{1}{x^2}$

vi. $f'(x)=(3\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x)'=(3\eta\mu x)'-(2\sigma\upsilon\nu x)'=3(\eta\mu x)'-2(\sigma\upsilon\nu x)'=3\sigma\upsilon\nu x-2\cdot(-\eta\mu x)=$
$=3\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x$

vii. $f'(x)=(2\sqrt{x}+3\ln x)'=(2\sqrt{x})'+(3\ln x)'=2(\sqrt{x})'+3(\ln x)'=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+3\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}$

viii. Είναι $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad(\sqrt[\mu]{x^\nu}=x^{\frac{\nu}{\mu}}, x>0)$

Άρα : $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x)=2x^3\cdot\ln x$

ii. $f(x)=(3x^2+5x)(2x+7)$

iii. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x$

iv. $f(x)=4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x$

v. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$

vi. $f(x)=\dfrac{x^2+10}{x+11}$

vii. $f(x)=\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

viii. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x-1}$

Λύση :

i. $f'(x)=(2x^3\cdot\ln x)'=(2x^3)'\cdot\ln x+2x^3\cdot(\ln x)'=6x^2\cdot\ln x+2x^3\cdot\dfrac{1}{x}=6x^2\cdot\ln x+2x^2$

ii. $f'(x)=(3x^2+5x)'(2x+7)+(3x^2+5x)(2x+7)'=(6x+5)(2x+7)+(3x^2+5x)\cdot 2=$
$=12x^2+42x+10x+35+6x^2+10x=18x^2+62x+35$

iii. $f'(x)=(\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x)'=(\sqrt{x})'\cdot\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot(\ln x)'=$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\dfrac{1}{x},\quad x>0.$

iv. $f'(x)=(4x^2\eta\mu x-3x^2\sigma\upsilon\nu x)'=(4x^2\eta\mu x)'-(3x^2\sigma\upsilon\nu x)'=$
$=(4x^2)'\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot(\eta\mu x)'-[(3x^2)'\cdot\sigma\upsilon\nu x+3x^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x)']=$
$=8x\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-[6x\cdot\sigma\upsilon\nu x+3x^2\cdot(-\eta\mu x)]=$
$=8x\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-(6x\cdot\sigma\upsilon\nu x-3x^2\cdot\eta\mu x)=$
$=8x\cdot\eta\mu x+4x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x-6x\cdot\sigma\upsilon\nu x+3x^2\cdot\eta\mu x=$

v. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x}\right)'=\dfrac{(x^2+2x-1)'\cdot x-(x^2+2x-1)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{(2x+2)x-x^2-2x+1}{x^2}=$
$\dfrac{2x^2+2x-x^2-2x+1}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

vi. $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+10}{x+11}\right)'=\dfrac{(x^2+10)'\cdot(x+11)-(x^2+10)\cdot(x+11)'}{(x+11)^2}=\dfrac{2x(x+11)-(x^2+10)}{(x+11)^2}=$
$=\dfrac{2x^2+22x-x^2-10}{(x+11)^2}=\dfrac{x^2+22x-10}{x^2+22x+121}$

vii. $f'(x)=\left(\dfrac{x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\dfrac{(x+\eta\mu x)'\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)-(x+\eta\mu x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)'}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=$
$=\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)\cdot(1+\sigma\upsilon\nu x)-(x+\eta\mu x)\cdot(-\eta\mu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}=\dfrac{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2+(x+\eta\mu x)\cdot\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$

viii. $f'(x)=\left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right)'=\dfrac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}=\dfrac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=$
$=\dfrac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}.$

3) Να βρείτε την παράγωγο της παρακάτω συνάρτησης : $f(x)=\begin{cases}x^2-x & ,x\le 2\\ x^3-2x^2-x+4 & ,x>2\end{cases}$

Λύση :

- Για $x<2$ έχω $f(x)=x^2-x$ άρα $f'(x)=2x-1$
- Για $x>2$ έχω $f(x)=x^3-2x^2-x+4$ άρα $f'(x)=3x^2-4x-1$
- Στο $x_0=2$ θα πρέπει να εξετάσω με τον ορισμό αν είναι παραγωγίσιμη :
  Πρώτα θα εξετάσω αν είναι συνεχής στο $x_0=2$:

$f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x)=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^3-2x^2-x+4)=2$ άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0=2$. Θα εξετάσω τώρα αν είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=3$

$\lim\limits_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^3-2x^2-x+4-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x^2-1)}{x-2}=3$ άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f'(2)=3$ άρα : $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x<2\\ 3 & ,x=2\\ 3x^2-4x-1 & ,x>2\end{cases}$ ή

$f'(x)=\begin{cases}2x-1 & ,x\le 2\\ 3x^2-4x-1 & ,x>2\end{cases}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u> :

4) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i. $f(x)=3x+2$
ii. $f(x)=x^2-3x+50$ στο x_0 =-1
iii. $f(x)=5x^3+7x^2-2x+100$
iv. $f(x)=e^x+4$
v. $f(x)=6\ln x+x$ x_0 =6
vi. $f(x)=2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x$
vii. $f(x)=5\varepsilon\phi x$
viii. $f(x)=\sqrt{x}+2\ln x$ x_0 =4

5) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i. $f(x)=x^2\cdot\ln x$
ii. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{x}$
iii. $f(x)=(x^2-2x)(2x+1)$
iv. $f(x)=(3x-x^2)(2x^3+x)$
v. $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$
vi. $f(x)=\eta\mu x\cdot e^x$
vii. $f(x)=x\cdot\eta\mu x$
viii. $f(x)=x^2\cdot\eta\mu x\cdot e^x$
ix. $f(x)=x\cdot e^x\cdot\ln x-e^x$
x. $f(t)=x^2\cdot\ln x+t^2e^x-\sqrt{t}\cdot\eta\mu t$

6) Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\frac{3x+2}{2x-3}$ ii. $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ iii. $f(x)=\frac{x^2+10}{x-1}$

iv. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ v. $f(x)=\frac{x^2\cdot\eta\mu x}{x-1}$ vi. $f(x)=\frac{x^2\cdot\ln x}{2x+1}$

7) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

8) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x<0 \\ \sigma\upsilon\nu x, x\geq 0\end{cases}$ ii. $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x, x<0 \\ x, x\geq 0\end{cases}$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x-x^2, x\leq 1 \\ x^2-3x+2, x>1\end{cases}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής. Στη συνέχεια να βρείτε την παράγωγο f΄(x) και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 =1.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x\cdot\eta\mu x-(x^2-2)\sigma\upsilon\nu x$. Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^3}$ ii. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f'(x)}{x^3}$

11) Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι :

i. $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+af'(\alpha)$

ii. $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=e^\alpha(f(\alpha)+f'(\alpha))$.

12) Αν $f(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f',g'. Ισχύει $f'=g'$;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ισχύει : $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

$\left(f^{\alpha}(x)\right)' = \alpha\cdot f^{\alpha-1}(x)\cdot f'(x)$
$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
$\left(\ln\lvert f(x)\rvert\right)' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)}\cdot\ln\alpha\cdot f'(x)$
$\left(\eta\mu f(x)\right)' = \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
$\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)' = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
$\left(\varepsilon\phi f(x)\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\sigma\phi f(x)\right)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^{2} f(x)}\cdot f'(x)$
$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{f^{2}(x)}\cdot f'(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \left(x^3+2x\right)^{2013}$

ii. $f(x) = \ln^3 x$

iii. $f(x) = \sqrt{x^3+2x}$

iv. $f(x) = \ln(x^3+2x)$

v. $f(x) = e^{x^3+2x}$

vi. $f(x) = \eta\mu(x^3+2x)$

vii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^3+2x)$

viii. $f(x) = \varepsilon\phi(x^3+2x)$

ix. $f(x) = \sigma\phi(x^3+2x)$

x. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+2x}$

xi. $f(x) = x^{\eta\mu x}$

Λύση :

i. $f'(x) = \left[\left(x^3+2x\right)^{2013}\right]' = 2013\cdot\left(x^3+2x\right)^{2012}\cdot(x^3+2x)' = 2013\cdot\left(x^3+2x\right)^{2012}\cdot(3x^2+2)$

ii. $f'(x) = (\ln^3 x)' = 3\ln^2 x\cdot(\ln x)' = 3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$

iii. $f'(x)=(\sqrt{x^3+2x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+2x}}\cdot(x^3+2x)'=\dfrac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x}}$

iv. $f'(x)=\left(\ln(x^3+2x)\right)'=\dfrac{1}{x^3+2x}\cdot(x^3+2x)'=\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}$

v. $f'(x)=(e^{x^3+2x})'=e^{x^3+2x}\cdot(x^3+2x)'=e^{x^3+2x}\cdot(3x^2+2)$

vi. $f'(x)=\left(\eta\mu(x^3+2x)\right)'=\sigma\upsilon\nu(x^3+2x)\cdot(x^3+2x)'=\sigma\upsilon\nu(x^3+2x)\cdot(3x^2+2)$

vii. $f'(x)=\left(\sigma\upsilon\nu(x^3+2x)\right)'=-\eta\mu(x^3+2x)\cdot(x^3+2x)'=-\eta\mu(x^3+2x)\cdot(3x^2+2)$

viii. $f'(x)=\left(\varepsilon\phi(x^3+2x)\right)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3+2x)}\cdot(x^3+2x)'=\dfrac{3x^2+2}{\sigma\upsilon\nu^2(x^3+2x)}$

ix. $f'(x)=\left(\sigma\phi(x^3+2x)\right)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2(x^3+2x)}\cdot(x^3+2x)'=-\dfrac{3x^2+2}{\eta\mu^2(x^3+2x)}$

x. $f(x)=\left(\dfrac{1}{x^3+2x}\right)'=-\dfrac{1}{(x^3+2x)^2}\cdot(x^3+2x)'=-\dfrac{3x^2+2}{(x^3+2x)^2}$

xi. (Υποδ. Για κάθε $\alpha\in\Re$ ισχύει : $\alpha=e^{\ln\alpha}$. Μια συνάρτηση $f(x)=[g(x)]^{h(x)}$, η οποία ορίζεται όταν $g(x)>0$, για να βρούμε την $f'(x)$ γράφουμε τον τύπο της $f(x)$ ως έξης : $f(x)=[g(x)]^{h(x)}=e^{\ln(g(x))^{h(x)}}=e^{h(x)\cdot\ln g(x)}$ και στη συνέχεια παραγωγίζουμε)
$f(x)=x^{\eta\mu x}$, με $A_f=(0,+\infty)$ και είναι : $f(x)=x^{\eta\mu x}=e^{\ln x^{\eta\mu x}}=e^{\eta\mu x\cdot\ln x}$ έτσι έχουμε :
$f'(x)=\left(e^{\eta\mu x\cdot\ln x}\right)'=e^{\eta\mu x\cdot\ln x}\cdot\left(\eta\mu x\cdot\ln x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$.

14) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x)=f(\eta\mu^2x)-f(\sigma\upsilon\nu^2x)$.

<u>Λύση :</u> $g'(x)=\left(f(\eta\mu^2x)-f(\sigma\upsilon\nu^2x)\right)'=f'(\eta\mu^2x)(\eta\mu^2x)'-f'(\sigma\upsilon\nu^2x)(\sigma\upsilon\nu^2x)'=$
$=f'(\eta\mu^2x)2\eta\mu x(\eta\mu x)'-f'(\sigma\upsilon\nu^2x)2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x)'=$
$=f'(\eta\mu^2x)2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+f'(\sigma\upsilon\nu^2x)2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x=f'(\eta\mu^2x)\cdot\eta\mu2x+f'(\sigma\upsilon\nu^2x)\cdot\eta\mu2x$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u> :

15) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\sqrt{3x+1}$

ii. $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$

iii. $f(x)=\sqrt{x\cdot e^x}$

iv. $f(x)=\ln(x-3)$

v. $f(x)=\ln(2x^3-3x)$

vi. $f(x)=\eta\mu(2x-5)$

vii. $f(x)=\sigma\upsilon\nu(2x^2-5)$

viii. $f(x)=x\cdot\sqrt{e^x+3}$

ix. $f(x)=\eta\mu\sqrt{x}$

x. $f(x)=x^x$

xi. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

xii. $f(x) = \left(x + \frac{2}{x}\right)^x$

16) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = e^{2x+2}$

ii. $f(x) = e^{x^2+x}$

iii. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-1}}$

iv. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$

v. $f(x) = (2x^2 + x)^5$

vi. $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$

vii. $f(x) = (x-1)^{2/3}$

viii. $f(x) = \eta\mu \left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

ix. $f(x) = \ln \left(\frac{1}{x} - x\right)$

x. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

xi. $f(x) = \eta\mu(x+1)^3$

xii. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x - 12}$

xiii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x^2 + 5)$

xiv. $f(x) = \varepsilon\phi e^{-x} + \sigma\upsilon\nu \ln x$

xv. $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \eta\mu 2x$

17) Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \sqrt{e^x + x^2} - e^{-2x^2}$

ii. $f(x) = \ln^2 x \cdot \sqrt{3 + 2\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 - 5x)$

iv. $f(x) = \varepsilon\phi 3x + e^{-\frac{x}{2}}$

v. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 3x$

vi. $f(x) = \ln^3(e^{-2x} + 1)$

vii. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$

viii. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{\eta\mu 2x}$

ix. $f(x) = \eta\mu^2(\sqrt{x+1})$

x. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

18) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν :

i. $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0 = 2$

ii. $f(x) = (2x)^{1/3} + (2x)^{2/3}$, $x_0 = 4$

iii. $f(x) = x^3 ημ^3(\pi x)$, $x_0 = \frac{1}{6}$

iv. $f(x) = \frac{x^2+2}{2-x}$, $x_0 = 3$.

19) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^{\ln x}$

ii. $f(x) = 2^{5x-3}$

iii. $f(x) = (\ln x)^x$, $x > 1$

iv. $f(x) = ημx \cdot e^{συνx}$

20) Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

21) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$, για την οποία ισχύει : $f(x^3+5x) = 5x^4 + 6x^2 + 4$, $x \in \Re$. Να βρείτε το $f'(6)$.

22) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \Re$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = xf(\ln x)$ για κάθε $x > 0$. Στη συνέχεια αν δίνεται ότι $f(1) = f'(1) = 2$, να βρείτε την τιμή $g'(e)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

23) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Λύση :

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)' == \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \cdot \left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2+1} \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = -\frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει : $\alpha f''(x)+\beta f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε :

$$f'(x)=\left(x\cdot e^{-x}\right)'=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}(-x)'=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=\left[(1-x)e^{-x}\right]'=(1-x)'e^{-x}+(1-x)(e^{-x})'=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=e^{-x}(-1-1+x)=e^{-x}(x-2)$$

Άρα

$$\alpha f''(x)+\beta f'(x)=f(x)\Leftrightarrow \alpha e^{-x}(x-2)+\beta(1-x)e^{-x}=xe^{-x}\Leftrightarrow \alpha x-2\alpha+\beta-\beta x=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-\beta)x+\beta-2\alpha=x\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \beta-2\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-2\end{cases}.$$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ</u> :

25) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

26) Δίνεται συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f(\ln x)=3e^{x-1}+\ln^2 x$, για κάθε $x>0$. Να βρείτε το $f''(0)$.

27) Να βρεθεί πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι $\mathrm{P}(x)+\mathrm{P}'(x)+\mathrm{P}''(x)=x^3+5x^2+x+3$.

*(**Υπόδειξη :** Αν το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ έχει βαθμό $\nu\ge 1$, τότε το $\mathrm{P}'(x)$ έχει βαθμό $\nu-1$)*

28) Να βρεθεί πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{P}(1)=0$ και για κάθε $x\in\Re$ να είναι $\left[\mathrm{P}'(x)\right]^2=4\mathrm{P}(x)$.

29) Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0)=4$, $f'(-1)=2$, $f''(2)=4$ και $f^{(3)}(1)=6$.

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}\eta\mu x$. Να δείξετε ότι $f''(x)+2f'(x)+2f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει : $2f''(x)-f'(x)=3f(x)$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

32) Δίνεται **παραγωγίσιμη** συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Λύση :

Στη σχέση : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ (1) θέτω $x=0$ και έχω : $f^3(0)=8 \Leftrightarrow f(0)=2$.

Η συνάρτηση $f^3(x)-2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2+8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)-2xf(x))'=(4x^2+8)' \Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=8x$ (2)

Στη (2) για $x=0$ έχω : $3f^2(0)\cdot f'(0)-2f(0)-2\cdot 0f'(0)=8\cdot 0 \Leftrightarrow 3\cdot 2^2\cdot f'(0)-2\cdot 2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\cdot f'(0)=4 \Leftrightarrow f'(0)=\dfrac{1}{3}$.

(***Προσοχή :*** *Στην παραπάνω άσκηση παραγωγίσαμε τη συναρτησιακή σχέση εφαρμόζοντας κανόνες παραγώγισης, γιατί είχαμε την πληροφορία ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα (στο $\mathbb{R}$). Αν γνωρίζαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη μόνο σε ένα σημείο (στο 0)* ***δεν*** *θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε κανόνες παραγώγισης στη δοσμένη σχέση και θα έπρεπε να βρούμε το $f'(0)$ με τον ορισμό)*

33) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$ ισχύει : $f''(x)-f''(y)=\dfrac{2f(x)}{x^2}-\dfrac{2f(y)}{y^2}$.

Λύση : Παραγωγίζουμε τη σχέση $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$ (1) ως προς x, θεωρώντας το y σταθερά : $\left(f(xy)\right)'=\left(x^2f(y)+y^2f(x)\right)' \Leftrightarrow f'(xy)\cdot(xy)'=2xf(y)+y^2f'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow yf'(xy)=2xf(y)+y^2f'(x)$ (2), επίσης με παραγώγιση στη σχέση (2) έχουμε :

$\left(yf'(xy)\right)'=\left(2xf(y)+y^2f'(x)\right)' \Leftrightarrow yf''(xy)\cdot(xy)'=2f(y)+y^2f''(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2f''(xy)=2f(y)+y^2f''(x) \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} f''(xy)=\dfrac{2f(y)}{y^2}+f''(x)$ (3) $x,y\in\mathbb{R}^*$

Τώρα παραγωγίζουμε την (1) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά : $\left(f(xy)\right)'=\left(x^2f(y)+y^2f(x)\right)' \Leftrightarrow f'(xy)\cdot(xy)'=x^2f'(y)+2yf(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf'(xy)=x^2f'(y)+2yf(x)$ (4), επίσης με παραγώγιση στη σχέση (4) έχουμε :

$\left(xf'(xy)\right)'=\left(x^2f'(y)+2yf(x)\right)' \Leftrightarrow xf''(xy)\cdot(xy)'=x^2f''(y)+2f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2f''(xy)=x^2f''(y)+2f(x) \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f''(xy)=f''(y)+\dfrac{2f(x)}{x^2}$ (5) $x,y\in\mathbb{R}^*$

Από (3) και (5) έχουμε :

$\dfrac{2f(y)}{y^2}+f''(x)=f''(y)+\dfrac{2f(x)}{x^2} \Leftrightarrow f''(x)-f''(y)=\dfrac{2f(x)}{x^2}-\dfrac{2f(y)}{y^2}$, $x,y\in\mathbb{R}^*$.

34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3x+2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(3)$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

i. Έχω : $D_f=\mathbb{R}$, Έστω $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}$, με $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1+2<3x_2+2 \Leftrightarrow$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1}+3x_1+2<e^{x_2}+3x_2+2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Άρα $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ οπότε : $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)'=(x)' \Leftrightarrow$ $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)=1$, όμως $f'(x)=e^x+3$ άρα : $\left(f^{-1}\right)'\left(e^x+3x+2\right)\cdot(e^x+3)=1$ (3).

Στην (3) για $x=0$ έχω : $\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot f'(0)=1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3)\cdot 4=1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

35) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2f(x)=4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

36) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)-2x=8x^3$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

37) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $e^{xf(x)}+3f(x)=19$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

38) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$ αν γνωρίζουμε ότι η f είναι :

i. παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii. παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

39) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x)+ae^{-f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων :

i.Να βρείτε το α

ii.Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.

iii.Να βρείτε το $f'(0)$

40) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x)\cdot f(2-x)=-x^3+x^2+5x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε :

i.Το $f'(1)$

ii.Το όριο : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

41) Δίνεται παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+7}}{x^2-4}=\dfrac{17}{24}$

i. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$.

ii. Αν $g(x)=f(x^2+3x)+f^2(x)-f(x^2+x)$, να βρείτε τη $g'(-2)$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

43) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(x)\neq -2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f^2(x)-f(x^2)=4x^3+2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(-1)\neq 0$

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=5\xi$.

44) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το Α(1,1), να βρείτε :

i. Το σημείο τομής της C_f με τον άξονα y΄y

ii. Το $f'(0)$

iii. Το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+1}}{\eta\mu x}$.

45) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x+y)=\dfrac{f(x)}{e^y}+\dfrac{f(y)}{e^x}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει : $e^x[f(x)+f'(x)]=e^y[f(y)+f'(y)]$.

46) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(xy)=f(x)+f(y)+x^2y^2-x^2-y^2$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ ισχύει : $xf'(x)-yf'(y)=2(x^2-y^2)$.

Β. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

ΠΡΟΣΟΧΗ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΕΞΗΣ :

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\boxed{\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega}$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x΄x. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι : $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$
- Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, τότε δεν είναι πάντα παραγωγίσημη στο x_0, αφού μπορεί να δέχεται και κατακόρυφη εφαπτομένη. (ο συντελεστής διεύθυνσης δεν ορίζεται άρα και το $f'(x_0)$) .Αν όμως δέχεται εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) τότε είναι παραγωγίσιμη. Οι έννοιες εφαπτομένη στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ και παράγωγος στο x_0 είναι ταυτόσημες.
- Αν μια παραγωγίσημη συνάρτηση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω, τότε :
  - $\omega \in [0, \pi)$ και $\omega \neq \frac{\pi}{2}$.
  - ω οξεία $\Leftrightarrow f'(x_0) > 0$.
  - ω αμβλεία $\Leftrightarrow f'(x_0) < 0$.
  - ω=0 $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ (// x΄x) .
- Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, μπορεί να έχει με τη C_f και άλλα κοινά σημεία. (π.χ. η εφαπτομένη της $f(x) = x^3$ στο $x_0 = 0$)

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

1Ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ	2Ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ
$\varepsilon\phi 0° = 0$	$\varepsilon\phi 180° = 0$
$\varepsilon\phi 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\varepsilon\phi 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\varepsilon\phi 45° = 1$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = 1$	$\varepsilon\phi 135° = -1$ ή $\varepsilon\phi\frac{3\pi}{4} = -1$
$\varepsilon\phi 60° = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$\varepsilon\phi 120° = -\sqrt{3}$ ή $\varepsilon\phi\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$
$\varepsilon\phi 90° = --$	

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$

Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε γνωστό σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, χρησιμοποιούμε τον τύπο $\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$. Βρίσκουμε το $f(x_0)$ άρα το σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$. Στη συνέχεια βρίσκω την $f'(x)$ και το $f'(x_0)$ κάνω αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο και προκύπτει η εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+5$, $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y-f(2)=f'(2)(x-2)$. Έχω $f(2)=7$ άρα το σημείο επαφής $\mathrm{A}(2, f(2))\to \mathrm{A}(2,7)$. Έχω : $f'(x)=2x-1$ άρα $f'(2)=3$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-7=3(x-2)\Leftrightarrow y-7=3x-6\Leftrightarrow y=3x+1$ Άρα : $(\varepsilon): y=3x+1$.

2) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0, f(0))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{A}(0, f(0))$, τότε $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

Στη σχέση : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ (1) θέτω $x=0$ και έχω : $f^3(0)=8\Leftrightarrow f(0)=2$.

Η συνάρτηση $f^3(x)-2xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισιμων, ομοίως και η συνάρτηση $4x^2+8$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμία. Επομένως παραγωγίζω και τα 2 μέλη της (1) και έχω : $(f^3(x)-2xf(x))'=(4x^2+8)'\Leftrightarrow 3f^2(x)\cdot f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=8x$ (2)

Στη (2) για $x=0$ έχω : $3f^2(0)\cdot f'(0)-2f(0)-2\cdot 0f'(0)=8\cdot 0\Leftrightarrow 3\cdot 2^2\cdot f'(0)-2\cdot 2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12\cdot f'(0)=4\Leftrightarrow f'(0)=\frac{1}{3}$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=\frac{1}{3}x\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+2$. Άρα : $(\varepsilon): y=\frac{1}{3}x+2$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2, x\le 2 \\ x^2+5x-10, x>2 \end{cases}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(2, f(2))$.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο επαφής $\mathrm{M}(2, f(2))$, τότε $(\varepsilon): y-f(2)=f'(2)(x-2)$. Έχω $f(2)=2^3-3\cdot 2+2\Leftrightarrow f(2)=4$ άρα το σημείο επαφής $\mathrm{M}(2, f(2))\to \mathrm{M}(2,4)$. Επίσης πρέπει να βρω το $f'(2)$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-3x+2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}=9$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+5x-10-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+5x-14}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+7)}{x-2}=9$$ άρα f παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f'(2)=9$.

Ισχύει : $(\varepsilon): y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-4=9(x-2)\Leftrightarrow y-4=9x-18\Leftrightarrow y=9x-14$. Άρα : $(\varepsilon): y=9x-14$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $f(x) = x^4 - 5x + 6$, $\mathrm{M}(1, f(1))$ ii. $f(x) = 2e^x$, $\mathrm{M}(0, f(0))$

iii. $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$, $\mathrm{M}(0, f(0))$ iv.

ii. $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+3}$, $\mathrm{M}(1, f(1))$

iii. $f(x) = x\ln x$, $\mathrm{M}(e, f(e))$

5) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, x \le -2 \\ 2x^2 + 3x + 6, x > -2 \end{cases}$. Να βρείτε, αν υπάρχει, την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(-2, f(-2))$.

6) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, x \le 2 \\ x^3 + 2ax^2 - x + 4, x > 2 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε το α

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(2, f(2))$.

7) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, x \le 1 \\ 2ax + 2\beta - 5, x > 1 \end{cases}$ $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{M}(1, f(1))$.

8) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο Ν εκτός του Μ. Στο σημείο Ν η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ.

9) Δίνεται η παραγωγίσημη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(3) = 5$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(3, f(3))$.

10) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x^2 - 3x + 1 \le f(x) \le 3x^2 - 9x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $\mathrm{A}(3, f(3))$, της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.

11) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f'(1) = f''(1) = 2$. Αν $g(x) = f(e^x)$, τότε να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{g'}$ στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y.

12) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$.

13) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)-2x=8x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,\, f(0))$.

14) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $e^{xf(x)}+3f(x)=19$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,\, f(0))$.

15) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3f(x^2+x)-11x=xf(3x-1)-9$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(2,\, f(2))$.

16) Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $\mathrm{M}\left(\xi,\dfrac{1}{\xi}\right)$. Αν A,B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι :
   i. Το Μ είναι μέσο του ΑΒ.
   ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi\in\mathbb{R}^*$.

17) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}=8$ και $f(1)=3$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

18) Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1{,}1)$, για την οποία ισχύει : $f(\eta\mu x)=e^x\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(0,\, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

19) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{\sqrt{x+2}-2}=-4$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $\mathrm{A}(2,\, f(2))$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x}$. Έστω ότι η C_f διέρχεται από το σημείο Α(-2,-5) και η εφαπτομένη της f στο Α σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$.
   i. Να βρείτε τα α,β.
   ii. Για $\alpha=-\dfrac{1}{4}$ και $\beta=8$ να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της f΄(x) στο σημείο $\mathrm{B}(-1,\, f'(-1))$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ ΤΗΣ

Όταν δε μας δίνεται το σημείο επαφής αλλά ένα στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης, τότε ξεκινάμε θεωρώντας το σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ το οποίο πρέπει και να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας το στοιχείο για την κλίση της εφαπτομένης. Πιο συγκεκριμένα διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = \lambda_\zeta$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): y = \lambda_\zeta x + \beta$, όταν $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = -\dfrac{1}{\lambda_\zeta}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, όταν $\lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 5 : Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει γωνία $\omega \neq 90^\circ$ με τον άξονα x΄x , όταν $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow f'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$ (ισχύει ότι $\varepsilon\varphi(\pi - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$)

Αφού βρούμε το σημείο επαφής $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, κάνουμε αντικατάσταση στον τύπο : $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που
   i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
   ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = x + 5$
   iii. Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 3y + 12 = 0$
   iv. Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
   v. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 45^0.

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επίσης $f'(x) = -2x + 3$.

i. Η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 άρα $f'(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -1$. Άρα $f(-1) = -4$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $\mathrm{M}(-1, f(-1)) \to \mathrm{M}(-1,-4)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y + 4 = 5(x+1) \Leftrightarrow y + 4 = 5x + 5 \Leftrightarrow y = 5x + 1$. Άρα : $(\varepsilon): y = 5x + 1$.

ii. Η $(\varepsilon) // (\zeta): y = x + 5 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\zeta \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $\mathrm{M}(1, f(1)) \to \mathrm{M}(1,2)$. Ισχύει :

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y-2 = x-1 \Leftrightarrow y = x+1$. Άρα : $(\varepsilon): y = x+1$.

iii. $(\varepsilon) \perp (\eta): x-3y+12=0 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \overset{\lambda_\eta = -\frac{A}{B} = \frac{1}{3}}{<\!=\!=\!=\!=\!=\!>} \lambda_\varepsilon = -3$ (Όταν δυο ευθείες είναι κάθετες οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι αντιθετοαντιστροφοι). $\lambda_\varepsilon = -3 \Leftrightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = -3 \Leftrightarrow -2x_0 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 3$. Άρα $f(3) = 0$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(3, f(3)) \to M(3,0)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y - 0 = -3(x-3) \Leftrightarrow y = -3x+9$. Άρα : $(\varepsilon): y = -3x+9$.

iv. $(\varepsilon) // x'x \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{2}$. Άρα $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) \to M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{9}{4} = 0(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{9}{4}$. Άρα : $(\varepsilon): y = \frac{9}{4}$.

(Θα μπορούσαμε να πούμε ότι επειδή $(\varepsilon) // x'x$ άρα θα είναι της μορφής $y = y_0$ και αφού βρούμε το σημείο επαφής $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, να πούμε κατευθείαν $(\varepsilon): y = \frac{9}{4}$)

v. Η (ε) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45°$ άρα $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 45° \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -2x_0 + 3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Άρα $f(1) = 2$ δηλαδή το σημείο επαφής είναι $M(1, f(1)) \to M(1,2)$. Ισχύει : $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x+1$ Άρα : $(\varepsilon): y = x+1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 3
ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = 5x + 7$
iii. Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 7y + 13 = 0$
iv. Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
v. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 45^0.
vi. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 135^0.

23) Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + 1$ που σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{2\pi}{3}$.

24) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = x\ln x$ που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x'\hat{O}y$.

25) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ που είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y=-2x-1$. Στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων.

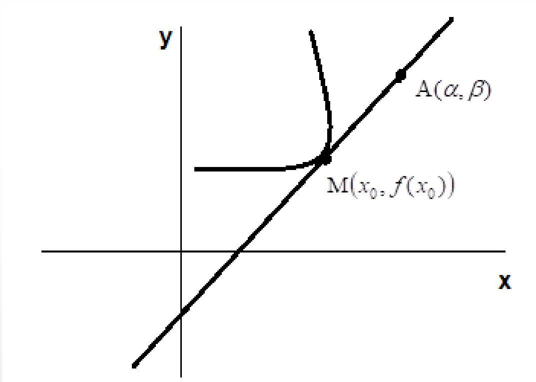
27) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y=2x$.

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-2x}(x^2+5)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της καμπύλης της f ώστε οι εφαπτομένες σ' αυτά να είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

29) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :
$f(x)=\eta\mu 2x-2\eta\mu^2 x$, $x\in[0,2\pi]$, στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

30) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3</u> : ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΟΥ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΓΝΩΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΠΟΥ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗ C_f



Για να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από ένα σημείο $A(\alpha,\beta)$ που **δεν ανήκει** στη C_f, εργαζόμαστε ως εξής :

1) θεωρούμε $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

2) γράφουμε τον τύπο της εφαπτομένης $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

3) η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,\beta)$, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωση της, Δηλ. $\beta-f(x_0)=f'(x_0)(\alpha-x_0)$

4) από την παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε την τιμή (ή τις τιμές) του x_0 και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης.

(<u>Προσοχή</u> : σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να μπερδεύουμε το σημείο επαφής με το σημείο διέλευσης.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

31) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=3x^2-5x+2$ που διέρχονται από το σημείο Α(3,2).

Λύση :

Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, τότε $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Επίσης $f'(x)=6x-5$.

Άρα : $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y-(3x_0^2-5x_0+2)=(6x_0-5)(x-x_0)$ (1)

Όμως η (ε) διέρχεται από το σημείο Α(3,2) άρα οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της (1) δηλαδή : $(\varepsilon): y-(3x_0^2-5x_0+2)=(6x_0-5)(x-x_0) \overset{\substack{x=3\\y=2}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 2-(3x_0^2-5x_0+2)=(6x_0-5)(3-x_0) \Leftrightarrow 2-3x_0^2+5x_0-2=18x_0-6x_0^2-15+5x_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_0^2-18x_0+15=0 \Leftrightarrow x_0^2-6x_0+5=0 \Leftrightarrow x_0=1$ ή $x_0=5$

- Για $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=0$ και $f'(x_0)=f'(1)=1$ άρα $(\varepsilon_1): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-0=1(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$ άρα $(\varepsilon_1): y=x-1$

- Για $x_0=5$, $f(x_0)=f(5)=52$ και $f'(x_0)=f'(5)=25$ άρα $(\varepsilon_2): y-f(5)=f'(5)(x-5) \Leftrightarrow y-52=25(x-5) \Leftrightarrow y-25=25x-125 \Leftrightarrow y=25x-73$ άρα $(\varepsilon_2): y=25x-73$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

32) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

33) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

34) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2$ η οποία διέρχεται από το σημείο Α(-1,-3).

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{7-2x}{3-x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Α(3,0).

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο Α(-3,-10).

37) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\lambda x}$, λ>0. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Ιούνιος 2005)

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΦΑΠΤΕΤΑΙ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΗ C_f

Η ευθεία (ε): $y=\lambda x+\beta$ εφάπτεται στη C_f, αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in D_f$, ώστε να ισχύει : $\begin{cases} f'(x_0)=\lambda \quad (1) \\ \mathrm{M}(x_0, f(x_0)) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(x_0)=\lambda x_0+\beta \quad (2) \end{cases}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

38) Αν η ευθεία $y=6x-2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=2x^2-\alpha x+\beta$ στο σημείο $\mathrm{M}(2, f(2))$,

i. Να βρείτε τα α,β.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f.

Λύση :

i. Έστω (ε) η εφαπτομένη που ψάχνω με σημείο επαφής το $\mathrm{M}(2, f(2))$. Επίσης $f'(x)=4x-\alpha$.

Η ευθεία $y=6x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $\mathrm{M}(2, f(2)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=6\cdot 2-2 \\ f'(2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2\alpha+\beta=10 \\ 8-\alpha=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha+\beta=2 \\ \alpha=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=6 \end{cases}$

ii. Για $\alpha=2$ και $\beta=6$ ο τύπος της f γίνεται : $f(x)=2x^2-2x+6$ άρα $f'(x)=4x-2$. Η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f, αν και μόνο αν υπάρχει σημείο $\mathrm{N}(x_0, f(x_0))$ της C_f, ώστε να ισχύουν : $\begin{cases} f(x_0)=2\cdot x_0+4 \\ f'(x_0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2-2x_0+6=2x_0+4 \\ 4x_0-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2-4x_0+2=0 \\ 4x_0=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2-2x_0+1=0 \\ x_0=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ x_0=1 \end{cases}$. Άρα η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $\mathrm{N}(1, f(1)) \to \mathrm{N}(1,6)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

39) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\zeta): y=-3x+6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-5x+7$

40) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): x-2y=0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-3x+3}$

41) Έστω $f:\Re \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με : $f'(1)=1$ και $g(x)=f(x^3+x+1)-1$, για κάθε $x \in \Re$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$.

ii. Να βρείτε το $g'(0)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται της C_g στο $\mathrm{B}(0, g(0))$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+3$ με $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(2, f(2))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=10x-9$.

i. Να βρείτε τα β,γ ii. Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $(\zeta): y=3x+2$ εφάπτεται της C_f.

43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ με $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-4x+7$.

i. Να βρείτε τα β,γ ii.Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $(\zeta): y=2x+4$ εφάπτεται της C_f.

44) Αν η ευθεία $y=2\alpha x-\beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x$ στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$, να βρείτε τα α,β.

45) Αν η ευθεία $y=2x-1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3-\beta x-2$ στο σημείο $\mathrm{M}(-1, f(-1))$, να βρείτε τα α,β.

46) Αν η ευθεία $y=\lambda x-1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2-x$, να βρείτε το σημείο επαφής και στη συνέχεια την ευθεία (ε).

47) Αν η διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=xe^{-\lambda x}$, $\lambda\neq 0$, να βρείτε το σημείο επαφής.

48) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x^2+3x$.

i.Να βρείτε της εφαπτομένη της καμπύλης της f στο $x_0=1$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x.

ii.Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εφαπτομένη, εφάπτεται και στην καμπύλη της g.

49) Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ της οποίας η C_f στο σημείο $\mathrm{A}(4, f(4))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=x-1$. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f^2(x)-9}{\sqrt{x}-2}$.

50) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και θεωρούμε και τη συνάρτηση $g(x)=(x^3-x^2)f(x^2-1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η ευθεία $y=40x-76$ εφάπτεται στη C_g στο σημείο της $\mathrm{A}(2, g(2))$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{B}(3, f(3))$.

51) Δίνονται οι παραγωγισιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $f(x^2)=(2x^3+3x^2)^2\cdot g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $(\varepsilon): y=3x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $\mathrm{B}(-1, g(-1))$.

52) Δίνεται άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y=2x-3$.

i.Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x^2 + x) + f^2(x)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της $\mathrm{B}(-2, g(-2))$.

53) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^2(x) + 8x = 2x^3 + (x^2 + 4) f(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 4x - 1$ εφάπτεται στη C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

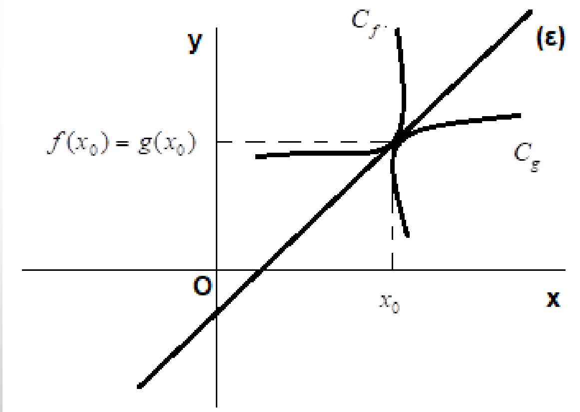
54) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\Re$ για την οποία ισχύει $f'(1) = 1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $\mathrm{B}(0, g(0))$.

55) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, x \geq 2 \\ 3x^2 - 10x - 4\alpha, x < 2 \end{cases}$ και η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το α   ii. Να βρείτε την $f'(x)$

ii. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(2, f(2))$ εφάπτεται και στη C_g στο σημείο $\mathrm{B}(3, g(3))$, τότε να βρείτε τα β,γ.

<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5</u> : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΚΟΙΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥΣ



Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g δυο συναρτήσεων f,g έχουν κοινή εφαπτομένη (ή αλλιώς εφάπτονται μεταξύ τους) στο κοινό σημείο τους $\mathrm{M}(x_0, y_0)$, αν ισχύει : $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

<u>ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> :

56) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ και $g(x) = x^2 + 2\kappa x + \lambda$. Να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \Re$, έτσι ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0 = -1$.

<u>Λύση :</u>

$$f'(x)=\left(\frac{2x}{x-1}\right)'=\frac{(2x)'(x-1)-2x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$g'(x)=2x+2\kappa$

Οι C_f,C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους με $x_0=-1$, άρα ισχύει : $f(-1)=g(-1)$ και $f'(-1)=g'(-1)$

Έχω $f(-1)=g(-1)\Leftrightarrow \frac{-2}{-2}=1-2\kappa+\lambda \Leftrightarrow 1=1-2\kappa+\lambda \Leftrightarrow \lambda=2\kappa$ (1)

Και $f'(-1)=g'(-1)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}=-2+2\kappa \Leftrightarrow -1=-4+4\kappa \Leftrightarrow \kappa=\frac{3}{4}$, άρα από (1) $\lambda=2\kappa \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

57) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2$ και $g(x)=x^2+2\beta x+\alpha$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

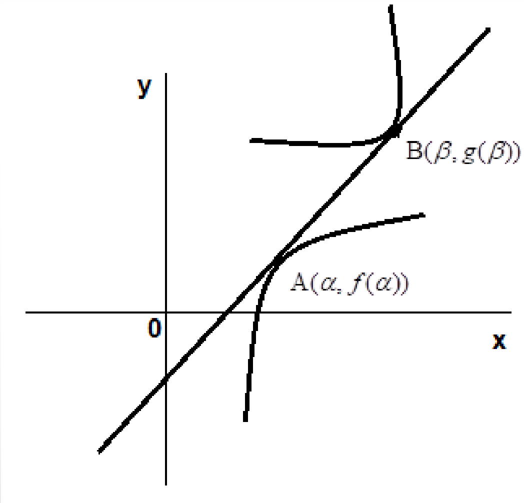
58) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=2x^2-7x+7$ και $g(x)=x^2-3x+3$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε και την εξίσωση.

59) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x+4$ και $g(x)=3x^2-3x$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g στο κοινό σημείο τους έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε και την εξίσωση.

60) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-3x+3$ και $g(x)=\frac{1}{x}$.

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g
ii. Να βρείτε το διάστημα όπου η C_f είναι κάτω από τη C_g
iii. Να δείξετε ότι στο κοινό σημείο τους οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΔΥΟ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΜΗ ΚΟΙΝΟ ΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟ



Για να βρούμε, αν υπάρχει, κοινή εφαπτομένη (ε) των C_f, C_g σε μη κοινό σημείο τους, εργαζόμαστε ως εξής :

1) θεωρούμε $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα

2) η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ είναι : $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$ είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

3) για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει : $\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases}$

4) από το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε τα α,β .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

61) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g.

Λύση : $f(x) = x^2 - 3x + 4$ με $D_f = \Re$ και $f'(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$ με $D_g = \Re$ και $g'(x) = 2x - 7$. Αρχικά θα εξετάσουμε αν οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους. Για να βρούμε κοινά σημεία των C_f, C_g, λύνουμε την εξίσωση : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = x^2 - 7x + 16 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$, άρα το κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $\mathrm{M}(3, f(3)) \to \mathrm{M}(3,4)$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους Μ πρέπει να ισχύει : $f(3) = g(3) \Leftrightarrow 4 = 4$ που ισχύει, και $f'(3) = g'(3) \Leftrightarrow 3 = -1$ που δεν ισχύει. Άρα οι C_f, C_g δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο τους.

Θα εξετάσουμε τώρα αν έχουν κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό σημείο. Έστω (ε) η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g και $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ και $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της (ε) με τις C_f και C_g αντίστοιχα.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$ είναι : $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ (1) ενώ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $\mathrm{B}(\beta, g(\beta))$ είναι : $y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x - \beta g'(\beta) + g(\beta)$ (2)

Για να παριστάνουν οι (1) και (2) την ίδια ευθεία πρέπει : $\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta g'(\beta) + g(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta - 7 \\ -\alpha(2\alpha-3) + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -\beta(2\beta-7) + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = -4 \\ -2\alpha^2 + 3\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -2\beta^2 + 7\beta + \beta^2 - 7\beta + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ -\alpha^2 + 4 = -\beta^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta - 2, (1) \\ \beta^2 - \alpha^2 = 12, (2) \end{cases} \Leftrightarrow$ η (2) λόγο της (1) γίνεται $\beta^2 - \alpha^2 = 12 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta^2 - (\beta-2)^2 = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta^2 - \beta^2 + 4\beta - 4 = 12 \Leftrightarrow 4\beta = 16 \Leftrightarrow \beta = 4$ και από (1) $\alpha - 4 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Άρα τα σημεία επαφής είναι $\mathrm{A}(2, f(2)) \to \mathrm{A}(2,2)$ και $\mathrm{B}(4, g(4)) \to \mathrm{B}(4,4)$, ενώ η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι : $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x-2) \Leftrightarrow y = x$ δηλαδή $(\varepsilon): y = x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

62) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g αν $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 + x + 4$.

63) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

64) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g αν $f(x) = x^2 - x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$.

65) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7 : ΥΠΑΡΞΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΠΑΦΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

66) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^2 - x$ στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, να είναι κάθετη στην ευθεία : $(\zeta): x + y + 2017 = 0$.

Λύση :

Έχουμε $\mathrm{A}_f = \Re$ και $f'(x) = e^x + 2x - 1$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$ με $(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ τότε $(\varepsilon) \perp (\zeta) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow f'(\xi)\cdot(-1) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$

Δηλ. $f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 1 = 1 \Leftrightarrow e^\xi + 2\xi - 2 = 0$. Έστω $g(x) = e^x + 2x - 2$, $x \in \Re$. Θα δείξω ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Εφαρμόζω Θ. Bolzano για τη $g(x)$ στο [0,1]

- Η $g(x)$ είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $\left.\begin{matrix} g(0) = e^0 - 2 = -1 < 0 \\ g(1) = e + 2 - 2 = e > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow g(0)\cdot g(1) < 0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

67) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει :

i. Ένα τουλάχιστον σημείο Α της C_f με τετμημένη $x_1 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Α να είναι παράλληλη στην ευθεία : $(\zeta): 12x - 2y + 2011 = 0$.

ii. Ένα τουλάχιστον σημείο Β της C_f με τετμημένη $x_2 \in (1,2)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο Β να τέμνει τον άξονα y΄y στο -16.

68) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = \ln x - 2x^2$ στο σημείο $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

69) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \ln x$. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8 : ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

70) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Λύση :

i. Έχω : $D_f = \mathbb{R}$, Έστω $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (1)

Επίσης : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις (1) και (2) και έχω : $e^{x_1} + 3x_1 + 2 < e^{x_2} + 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα η $f(x)$ είναι «1-1» και άρα η $f(x)$ αντιστρέψιμη. Επίσης $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

ii. Έστω (ε) η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $\mathrm{M}\left(3, f^{-1}(3)\right)$ τότε :

$(\varepsilon): y - f^{-1}(3) = \left(f^{-1}\right)'(3)(x-3)$ (3)

Για $\alpha \in \Re$ είναι : $f^{-1}(3) = \alpha \Leftrightarrow f\left(f^{-1}(3)\right) = f(\alpha) \Leftrightarrow 3 = f(\alpha) \overset{f(0)=3}{\Leftrightarrow} f(\alpha) = f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = 0$.

Άρα $\boxed{f^{-1}(3) = 0}$. Για κάθε $x \in \Re$ ισχύει ότι $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ οπότε : $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)' = (x)' \Leftrightarrow$ $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) = 1$, όμως $f'(x) = e^x + 3$ άρα : $\left(f^{-1}\right)'\left(e^x + 3x + 2\right) \cdot (e^x + 3) = 1$ (4).

Στην (4) για $x = 0$ έχω : $\left(f^{-1}\right)'(3) \cdot f'(0) = 1 \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)'(3) \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{4}}$.

Άρα : (3) $(\varepsilon): y - f^{-1}(3) = \left(f^{-1}\right)'(3)(x-3) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{4}(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

71) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

72) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + 2x^3$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 0$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Γ. ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1º

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2º

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0 \in R\cup\{-\infty,+\infty\}$, $g'(x)\neq 0$ σε περιοχή του x_o με εξαίρεση ίσως το x_o και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{0}{0}$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, εφαρμόζω το Θ. De L΄Hospital (παραγωγίζω αριθμητή και παρανομαστή). Αν έχουμε και πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

π.χ. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'}{(-\eta\mu x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{-\sigma\upsilon\nu x}=\frac{0}{-1}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

1) Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x+\eta\mu 2x}{\eta\mu 5x-\eta\mu 2x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-x^2-x}{x^3-x^2}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}$

vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ vii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$ viii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ ix) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x}{e^x-1}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\frac{\infty}{\infty}$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, εφαρμόζω το Θ. De L΄Hospital (παραγωγίζω αριθμητή και παρανομαστή). Αν έχουμε και πάλι απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα.

π.χ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x^2}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x^2)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{xe^x}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

2) Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+\ln x}{3x+\ln x}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{e^x}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x}$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$ vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^x+2)}{x}$ viii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+2)}{\ln(x^2+5)}$ ix) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0\cdot\infty$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, γράφω $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ή $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$

οπότε έχω απροσδιοριστία $\dfrac{0}{0}$ ή $\dfrac{\infty}{\infty}$ και λειτουργώ όπως παραπάνω.

π.χ.1 $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{0\cdot(-\infty)}{==}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

π.χ.2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x)\overset{-\infty\cdot0}{==}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\dfrac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x)'}{(e^{-x})'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

3) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to0^+}(x\ln x)$ ii) $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2\ln x)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(2-x^2)$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$ v) $\lim\limits_{x\to0^+}(\sqrt{x}\ln x)$ vi) $\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-1)\ln x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $\infty-\infty$

Α. Όριο $\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$. Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία $\infty-\infty$**,** γράφουμε τον τύπο με τη μορφή $f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$ ή $g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)$. Για το $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ ή $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}$ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$, και εφαρμόζουμε Θ. De L΄Hospital.

π.χ.1 $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x+e^x)\overset{+\infty-\infty+\infty}{====}\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{e^x}{x}\right)\right)=l$

όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

επίσης : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$

Άρα : $\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{e^x}{x}\right)\right)=+\infty(1-0+\infty)=+\infty$

π.χ.2 **(Ειδική περίπτωση!!) $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-x\right]$

(σε όρια αυτής της μορφής, αν δουλέψουμε σύμφωνα με τη μεθοδολογία και το π.χ.1 θα οδηγηθούμε σε απροσδιοριστία $0\cdot\infty$, για αυτό χρησιμοποιώ το εξής τέχνασμα :)

Έχουμε : $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-\ln e^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+1}{e^x}\right)=l$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x+1)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

Άρα : $\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x+1}{e^x}\right)=\ln 1=0$

Β. Όταν ο τύπος είναι διαφορά, με ένα τουλάχιστον όρο κλάσμα, και έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\infty-\infty$, κάνουμε ομώνυμα και μετά βρίσκουμε το Όριο.

π.χ. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(xe^x-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x+xe^x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

4) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x+1)-x]$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - \ln x)$
iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x^2)$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x^2)$ vi) $\lim\limits_{x\to-\infty}[x^3 + e^{-x}]$ vii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln(1+e^x)]$
viii) ** $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x+x)-x]$ ix)** $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^x-1)-x+1]$ x)** $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(x^2+1)-e^{x^2+1}]$

5) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Αφού διαπιστώσω την απροσδιοριστία, γράφω $f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]} = e^{g(x)\ln[f(x)]}$. Στη συνέχεια βρίσκω το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot\ln(f(x))] = l$. Το ζητούμενο όριο είναι e^l.

π.χ. 1 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$, έχουμε :

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{==} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Άρα : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

6) Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\eta\mu x}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ Θ. HOSPITAL ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

7) Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^x-e^{-x}-x, x\le 0 \\ \dfrac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}, x>0 \end{cases}$

8) Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^{1-\sigma\upsilon\nu x}+x, x\le 0 \\ \dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}, x>0 \end{cases}$

9) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x=1 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 2x-x^2, x\le 1 \\ x-\ln x, x>1 \end{cases}$

.

10) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} 1+x-x^2, x\le 0 \\ e^x+x^2, x>0 \end{cases}$.

11) Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση x=0 η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} e^x-1, x\le 0 \\ x\ln x, x>0 \end{cases}$.

12) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f(x)-f(x-h)-f(x+h)}{h^2}=e^x+x-1$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την f''.

13) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=0$.

i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$
iii. Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_h στα σημεία $\mathrm{A}(0,f(0))$ και $\mathrm{B}(0,h(0))$ είναι παράλληλες. (Θέμα πανελληνίων)

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

38. ΟΡΙΣΜΟΣ

Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Απάντηση :

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια :

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $\mathrm{K}'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Για να επιλύσουμε προβλήματα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής μεγεθών, κάνουμε τα εξής :

i. Πρώτα καταγράφουμε όλους τους αγνώστους, καθώς και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Αν η σχέση που συνδέει τους αγνώστους δε δίνεται στην εκφώνηση, τότε την φτιάχνουμε μέσα από τα δεδομένα της εκφώνησης (είτε με σχήμα, είτε με τη λογική σκέψη).
ii. Έπειτα μετατρέπουμε τη σχέση που συνδέει τους αγνώστους σε συνάρτηση ως προς τον ανεξάρτητο άγνωστο.
iii. Υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων όταν $x = x_0$ που ζητείται ο ρυθμός μεταβολής.
iv. Τέλος παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που φτιάξαμε και με αντικατάσταση $x = x_0$ προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

Υπενθύμιση :

- Εμβαδόν σφαίρας : $\text{E} = 4\pi R^2$, Όγκος σφαίρας : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- Εμβαδόν κώνου : $\text{E} = \pi R\lambda + \pi R^2$, Όγκος κώνου : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \upsilon$,
- Όγκος πυραμίδας : $V = \frac{1}{3}\text{E}_{\beta \acute{\alpha} \sigma \eta \varsigma} \cdot \upsilon$
- Ο ρυθμός μεταβολής της **ταχύτητας** v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος (δηλ. $\text{K}(x), \text{E}(x), \text{P}(x)$). Έτσι, η παράγωγος $\text{K}'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0. Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0. Η βασική σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $\text{K}(x), \text{E}(x), \text{P}(x)$ είναι $\boxed{\text{P}(x) = \text{E}(x) - \text{K}(x)}$. Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος συμβολίζεται με $\text{K}_{\mu}(x)$ και είναι $\boxed{\text{K}_{\mu}(x) = \frac{\text{K}(x)}{x}}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(4,0) και Β(0,x) ως προς x, όταν x=3.

Λύση :

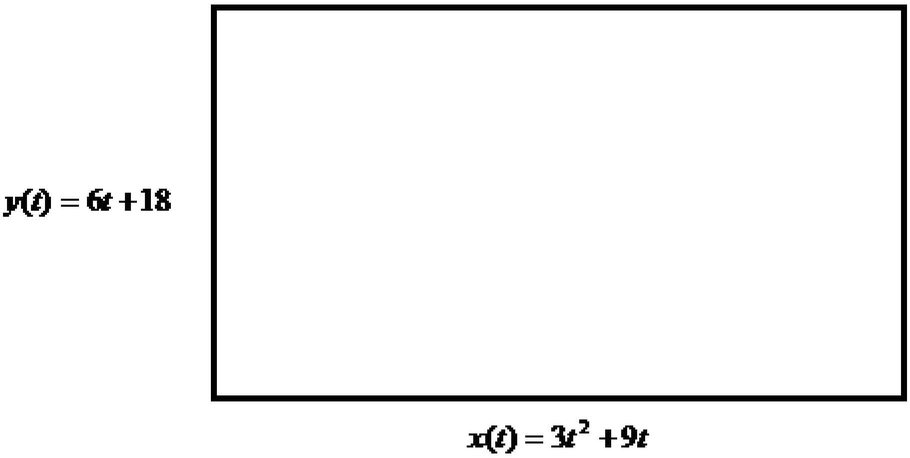
Η Απόσταση δυο σημείων $\text{A}(x_1, y_1)$ και $\text{B}(x_2, y_2)$ Δίνεται από τον τύπο : $(\text{AB}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Άρα $(\text{AB}) = \sqrt{(0-4)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{16 + x^2}$

Άρα η συνάρτηση που δίνει την απόσταση (AB) ως προς x είναι $f(x) = \sqrt{16 + x^2}$ με $D_f = \mathbb{R}$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ όταν x=3, δηλ. το $f'(3)$. Βρίσκω πρώτα την $f'(x) = (\sqrt{16 + x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{16 + x^2}} \cdot (16 + x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}$

Άρα $f'(3) = \frac{3}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5}$

2) Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t) = 3t^2 + 9t$ και $y(t) = 6t + 18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

Λύση :



$\mathrm{E}=x\cdot y$ άρα $\mathrm{E}(t)=x(t)\cdot y(t)=(3t^2+9t)(6t+18)=18t^3+54t^2+54t^2+162t=$
$=18t^3+108t^2+162t$

Τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα ισχύει $x(t)=y(t)\Leftrightarrow 3t^2+9t=6t+18\Leftrightarrow 3t^2+3t-18=0\Leftrightarrow t^2+t-6=0\Leftrightarrow t=2, ή, t=-3$ απορ.

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι $\mathrm{E}(t)=18t^3+108t^2+162t$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο δηλ. το $\mathrm{E}'(2)$. Βρίσκω πρώτα $\mathrm{E}'(t)=54t^2+216t+162$. Άρα $\mathrm{E}'(2)=54\cdot 2^2+216\cdot 2+162=810$ τετραγωνικές μονάδες/sec.

3) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x=x(t)=t^3-6t^2+9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t.
ii. Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;
iii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

Λύση :

i. Η ταχύτητα είναι : $\upsilon(t)=x'(t)=(t^3-6t^2+9t)'=3t^2-12t+9$.

ii. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t=2s$ είναι $\upsilon(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+9=-3\,\mathrm{m/s}$ και σε χρόνο $t=4s$ είναι $\upsilon(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+9=9\,\mathrm{m/s}$.

iii. Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $\upsilon(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9=0\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1$ ή $t=3$.

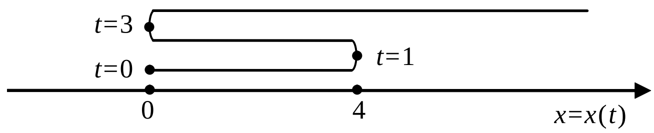
Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

iv. Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν

$\upsilon(t)>0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9>0\Leftrightarrow t^2-4t+3>0\Leftrightarrow (t-1)(t-3)>0\Leftrightarrow t<1$ ή $t>3$.

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t<1$ και $t>3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1<t<3$).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



v.Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου $S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4\,\mathrm{m}$.
- Από $t = 1$ μέχρι $t = 3$ $\quad S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4\,\mathrm{m}$
- Από $t = 3$ μέχρι $t = 5$ $\quad S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20\,\mathrm{m}$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28\,\mathrm{m}.$$

4) Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου *t* ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας *E* και του όγκου *V* της μπάλας, όταν $t = 1$sec.

(Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) *(Ασκ. 1 Α΄ ομάδας σελ. 243 σχολικό)*

<u>Λύση :</u> Επειδή $\mathrm{E} = 4\pi r^2$ και η ακτίνα r μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t, έχουμε :

$\mathrm{E}(t) = 4\pi r^2(t)$ και $r(t) = 4 - t^2$.

$\mathrm{E}'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t)$ με $r'(t) = -2t$.

Έτσι : $\mathrm{E}'(1) = 8\pi r(1) \cdot r'(1) = 8\pi \cdot 3 \cdot (-2) = -48\pi \;\; cm^2/s$

Ομοίως $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$, $V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$

Έτσι : $V'(1) = 4\pi r^2(1) \cdot r'(1) = 4\pi \cdot 9 \cdot (-2) = -72\pi \;\; cm^3/s$

5) Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85$ cm.

(Ασκ. 1 Β΄ ομάδας σελ. 244 σχολικό)

<u>Λύση :</u> Είναι $r = r(t)$ η ακτίνα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου t.

Η επιφάνεια της σφαίρας είναι $\mathrm{E}(t) = 4\pi r^2(t)$ και ο όγκος $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$.

Οπότε : $\mathrm{E}'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t)$ και $V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10cm^2/sec δηλ. $\mathrm{E}'(t_0) = +10 \;\; cm^2/s$ και η ακτίνα της είναι $r(t_0) = 85 \;\; cm$.

Άρα

$$\mathrm{E}'(t_0) = +10 \;\; cm^2/s \Leftrightarrow 8\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 10 \Leftrightarrow 8\pi \cdot 85 \cdot r'(t_0) = 10 \Leftrightarrow r'(t_0) = \frac{1}{68\pi} cm/s$$

Έτσι : $V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0) \cdot r'(t_0) = 4\pi \cdot 85^2 \cdot \frac{1}{68\pi} = 425\, cm^3/s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

6) Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$, $x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$. *(Ασκ. 5 Α΄ ομάδας σελ. 244 σχολικό)*

Λύση : Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2$. Επειδή η τετμημενη και η τεταγμένη του σημείου Μ μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t είναι $x=x(t),\ y=y(t)$ με $y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)$

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης *x* του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του *y* άρα : $x'(t)=y'(t)\Leftrightarrow x'(t)=\left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)'\Leftrightarrow x'(t)=\frac{1}{2}x(t)\cdot x'(t)\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}x(t)\Leftrightarrow x(t)=2$. Και $y(t)=\frac{1}{4}x^2(t)\Leftrightarrow y(t)=\frac{1}{4}2^2\Leftrightarrow y(t)=1$. Δηλ. $\mathrm{M}(2,1)$

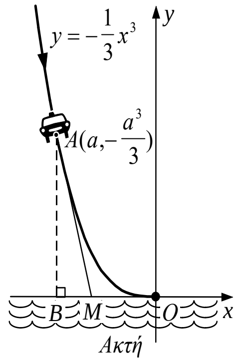
7) Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2+y^2=1$. Καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α. *(Ασκ. 8 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)*

Λύση : Έστω $x=x(t),\ y=y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, την τυχαία χρονική στιγμή t. Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι $\boxed{x(t_0)=\frac{1}{2},\ y(t_0)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Επίσης $\boxed{y'(t_0)=-3}$. Όμως το κινητό κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=1$ δηλ. $x^2(t)+y^2(t)=1$. Παραγωγιζοντας και τα δυο μέλη έχουμε : $\left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=0\Leftrightarrow 2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$ (1)

Έτσι η (1) για $t=t_0$ γίνεται :

$2x(t_0)\cdot x'(t_0)+2y(t_0)\cdot y'(t_0)=0\Leftrightarrow 2\frac{1}{2}\cdot x'(t_0)+2\frac{\sqrt{3}}{2}(-3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'(t_0)=3\sqrt{3}\ \mu o\nu \acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma/s$.



8) Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

(Ασκ. 6 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)

<u>Λύση :</u>

Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Είναι $y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3$, $x\le 0$ με $f'(x)=-x^2$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\alpha,-\frac{\alpha^3}{3}\right)$ τότε $(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon): y+\frac{\alpha^3}{3}=-\alpha^2(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\varepsilon): y=-\alpha^2 x+\frac{2\alpha^3}{3}$. Το σημείο Μ είναι το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον x΄x.

Έτσι : $(\varepsilon) \overset{y=0}{\Leftrightarrow} 0=-\alpha^2 x+\frac{2\alpha^3}{3} \Leftrightarrow 3\alpha^2 x=2\alpha^3 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x=\frac{2\alpha}{3}$. Άρα το σημείο Μ έχει τετμημενη $x(t)=\frac{2\alpha(t)}{3}$, έτσι $x'(t)=\frac{2\alpha'(t)}{3}=-\frac{2\alpha(t)}{3}$, όμως τη χρονική στιγμή t_0 το περιπολικό, δηλ το σημείο Α, έχει τετμημένη -3 άρα $\alpha(t_0)=-3$. Τελικά $x'(t_0)=-\frac{2\alpha(t_0)}{3}=-\frac{2(-3)}{3}=2\ \frac{\mu o\nu.\ \mu \acute{\eta}\kappa o\upsilon\varsigma}{\mu o\nu.\ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon}$.

9) Ένα υλικό σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $C: y=e^x+x^3+1$, με $x=x(t),\ y=y(t)\quad t\ge 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l=(\mathrm{OM})$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

<u>Λύση :</u>

Έστω $x=x(t), y=y(t)$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Ισχύει ότι $y(t)=e^{x(t)}+x^3(t)+1$. Τη χρονική στιγμή t_0 το Μ παίρνει από το $\mathrm{A}(0,2)$, άρα : $\boxed{x(t_0)=0,\ y(t_0)=2}$ και από εκφώνηση $\boxed{x'(t_0)=2\ \mu o\nu./s}$. Επίσης :

$(\mathrm{OM})=l=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow l^2=x^2+y^2$. Όμως η απόσταση $l=(\mathrm{OM})$ είναι συνάρτηση του χρόνου t, έτσι έχω : $l^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$ (1).

Παραγωγίζοντας τα δυο μέλη της (1) έχω : $2l(t)\cdot l'(t)=2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)$ (2).

Επίσης η (1) για $t=t_0$ γίνεται : $l^2(t_0)=x^2(t_0)+y^2(t_0) \Leftrightarrow l^2(t_0)=4 \Leftrightarrow \boxed{l(t_0)=2}$.

Ακόμα : $y'(t)=\left(e^{x(t)}+x^3(t)+1\right)'=e^{x(t)}\cdot x'(t)+3x^2(t)\cdot x'(t)$,

Δηλαδή : $y'(t_0)=e^{x(t_0)}\cdot x'(t_0)+3x^2(t_0)\cdot x'(t_0)=e^0\cdot 2+3\cdot 0^2\cdot 2=2 \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0)=2}$.

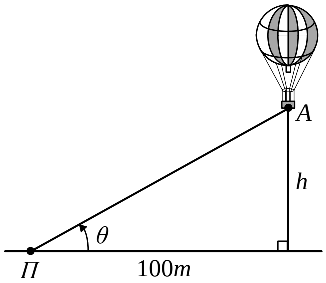
Τελικά η (2) για $t=t_0$ γίνεται : $2l(t_0)\cdot l'(t_0)=2x(t_0)\cdot x'(t_0)+2y(t_0)\cdot y'(t_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2l'(t_0)=2\cdot 0\cdot 2+2\cdot 2\cdot 2 \Leftrightarrow 4l'(t_0)=8 \Leftrightarrow l'(t_0)=2\ \mu o\nu./s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

10) Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



(Ασκ. 4 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)

Λύση :

Το ύψος h και η γωνία θ μεταβάλλονται ως συνάρτηση του χρόνου t.

Έτσι : $h = h(t)$ και $\theta = \theta(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 από δεδομένα έχουμε :

$\boxed{h(t_0) = 100m}$ και $\boxed{h'(t_0) = 50m/\min}$. Το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έτσι : $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{\alpha\pi.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta} = \dfrac{h}{100} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \dfrac{h(t)}{100}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$\left(\varepsilon\phi\theta(t)\right)' = \left(\frac{h(t)}{100}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^2\theta(t) + \sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} + 1\right) \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \Leftrightarrow \left(\varepsilon\phi^2\theta(t) + 1\right) \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \quad (1)$$

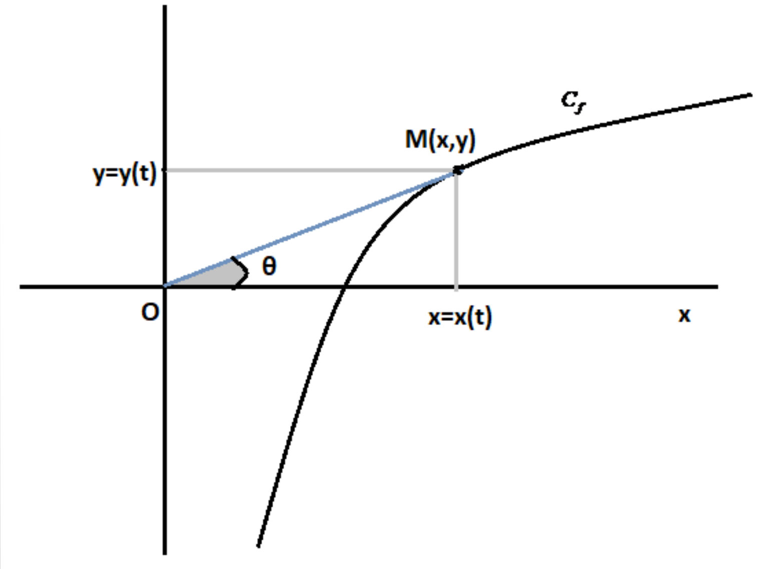
Η (1) για $t = t_0$ γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right) \cdot \theta'(t_0) = \dfrac{1}{100} \cdot h'(t_0)$ (2)

Όμως $\varepsilon\phi\theta(t_0) = \dfrac{h(t_0)}{100} = \dfrac{100}{100} = 1$.

Άρα η (2) γίνεται :

$$\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right) \cdot \theta'(t_0) = \frac{1}{100} \cdot h'(t_0) \Leftrightarrow (1^2 + 1) \cdot \theta'(t_0) = \frac{50}{100} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{1}{4}\, rad/\min .$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ $\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$



Όταν έχουμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας θ, $\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x}$. Στη συνέχεια εισάγουμε τη μεταβλητή του χρόνου ώστε $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$ και παραγωγίζουμε τα δυο μέλη.

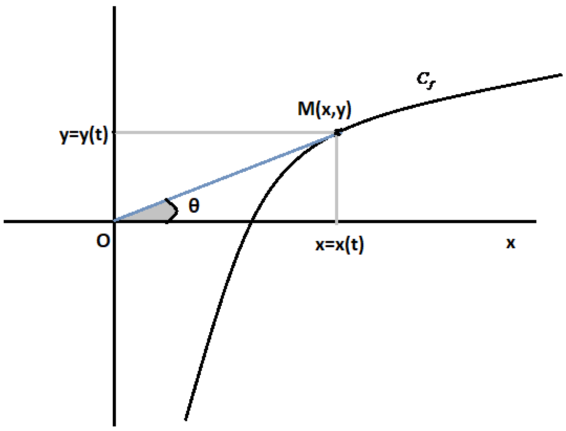
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

11) Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ και καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(1,0)$ η τετμημένη του ελαττώνεται κατά 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

Λύση :

Είναι $y = f(x) = \ln x$ και το σημείο $\mathrm{M}(x, y) \in C_f$, με $x = x(t)$ και $y = y(t) = \ln x(t)$, $t \geq 0$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ περνάει από το Α, τότε $x(t_0) = 1$, $y(t_0) = \ln x(t_0) = 0$, και $x'(t_0) = -2$.



$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}$ και τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ είναι : $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\ln x(t)}{x(t)}$ (1)

Παραγωγίζουμε τα δυο μέλη της (1) και έχουμε :

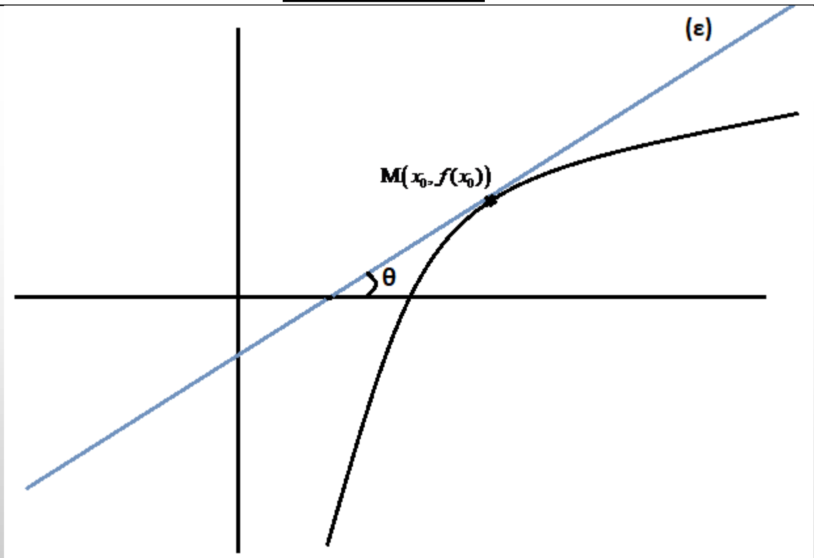
$$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)' = \left(\frac{\ln x(t)}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{\frac{x'(t)}{x(t)}\cdot x(t) - \ln x(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t)+\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{x'(t)-\ln x(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow \left(\varepsilon\varphi^2\theta(t)+1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{x'(t)-\ln x(t)\cdot x'(t)}{x^2(t)}$$

Για $t=t_0$ έχουμε : $\left(\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{x'(t_0)-\ln x(t_0)\cdot x'(t_0)}{x^2(t_0)}$ (2)

$\varepsilon\varphi\theta(t_0) = \dfrac{\ln x(t_0)}{x(t_0)} = 0$, επομένως, $(2) \Leftrightarrow \left(0^2+1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{-2-0\cdot(-2)}{1^2} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -2\ rad/\sec$.

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΓΩΝΙΑΣ ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΕΙ Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $\mathrm{M}\left(x_0, f(x_0)\right)$ ΜΕ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ x΄x



Όταν έχουμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, με τον άξονα x΄x, τότε χρησιμοποιούμε ότι : $\varepsilon\varphi\theta = f'(x_0)$.

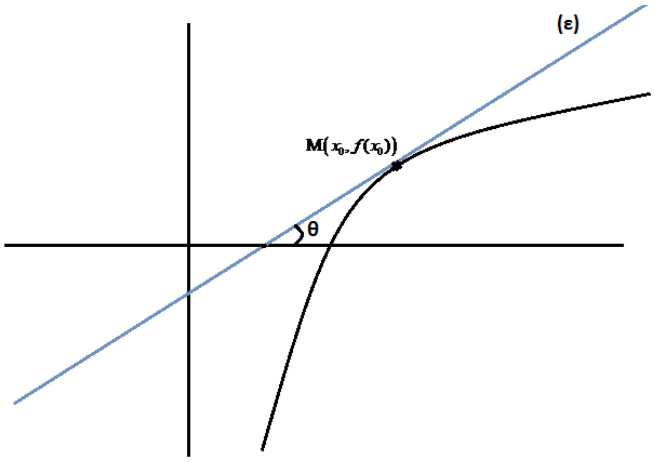
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

12) Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$. Τη χρονική στιγμή που το Μ έχει τετμημένη e, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι $2e\, cm/\sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ, που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ, με τον άξονα x΄x, την παραπάνω χρονική στιγμή.

Λύση :

Έχουμε το σημείο $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$, με $x_0 = x(t)$ και $f(x_0) = y_0 = y(t) = \ln x(t)$, $t \geq 0$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ έχει τετμημένη e, τότε $x(t_0)=e$, $y(t_0)=\ln x(t_0)=1$ και $x'(t_0)=2e$.



$f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ και $\varepsilon\varphi\theta = f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$

Τη χρονική στιγμή $t\geq 0$ είναι : $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{1}{x(t)}$ (1)

Παραγωγίζουμε τα δυο μέλη της (1) και έχουμε :

$$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{1}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t)+\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

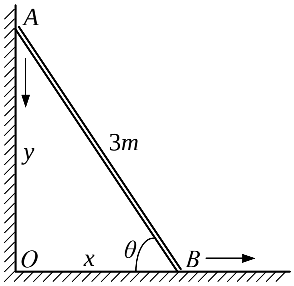
$\Leftrightarrow \left(\varepsilon\varphi^2\theta(t)+1\right)\cdot\theta'(t)=-\frac{x'(t)}{x^2(t)}$. Για $t=t_0$ έχουμε : $\left(\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)+1\right)\cdot\theta'(t_0)=-\frac{x'(t_0)}{x^2(t_0)}$ (2)

$\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\frac{1}{x(t_0)}=\frac{1}{e}$, επομένως, (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{e^2}+1\right)\cdot\theta'(t_0)=-\frac{2e}{e^2} \Leftrightarrow \theta'(t_0)=-\frac{2e}{e^2+1} rad/\sec$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΑΛΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

13) Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστρά στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:



i. Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή *Α* της σκάλας.

ii. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας *θ* (Σχήμα).

(Ασκ. 7 Β΄ ομάδας σελ. 245 σχολικό)

Λύση :

i. Τα μεγέθη x, y, θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t),\ y = y(t),\ \theta = \theta(t)$.

Από δεδομένα έχουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\boxed{x'(t_0) = 0{,}1m/s}$, $\boxed{y(t_0) = 2{,}5m}$.

Ψάχνουμε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή *Α* της σκάλας δηλ. το $y'(t_0)$.

Επειδή το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έχουμε :

$x^2 + y^2 = 3^3 \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 9$ (1)

Επίσης $x^2(t) + y^2(t) = 9 \overset{t=t_0}{\Leftrightarrow} x^2(t_0) + y^2(t_0) = 9 \Leftrightarrow x^2(t_0) + 6{,}25 = 9 \Leftrightarrow \boxed{x(t_0) = \sqrt{2{,}75}m}$.

Παραγωγίζοντας την ισότητα (1) έχουμε : $2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$ (2)

Η (2) για $t = t_0$ γίνεται :

$2x(t_0)\cdot x'(t_0) + 2y(t_0)\cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2{,}75}\cdot 0{,}1 + 2\cdot 2{,}5\cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{y'(t_0) = -\dfrac{\sqrt{2{,}75}}{25}\ m/s}$.

ii. Είναι $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{\alpha\pi.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\pi\rho o\sigma\kappa.\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$\left(\varepsilon\phi\theta(t)\right)' = \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t) + \sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} + 1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow \left(\varepsilon\phi^2\theta(t) + 1\right)\cdot\theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

(3)

Η (3) για $t = t_0$ γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}$ (4)

Όμως $\varepsilon\phi\theta(t_0) = \dfrac{y(t_0)}{x(t_0)} = \dfrac{2{,}5}{\sqrt{2{,}75}}$.

Άρα η (4) γίνεται : $\left(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1\right)\cdot\theta'(t_0) = \dfrac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow$

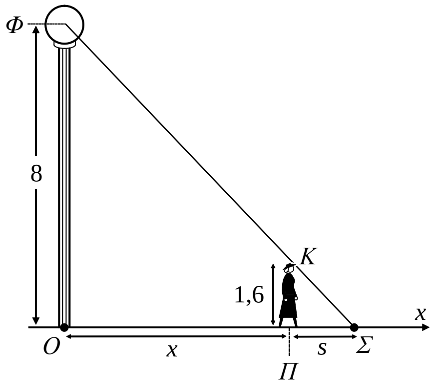
$$\Leftrightarrow \left(\frac{6,25}{2,75}+1\right)\cdot \theta'(t_0) = \frac{-\frac{\sqrt{2,75}}{25}\cdot\sqrt{2,75}-2,5\cdot 0,1}{2,75} \Leftrightarrow \frac{9}{2,75}\theta'(t_0) = \frac{-\frac{2,75}{25}-0,25}{2,75} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\theta'(t_0) = -0,36 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -0,04\ rad/s.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

14) Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



(Ασκ. 5 Β΄ ομάδας σελ. 244 σχολικό)

Λύση :

Επειδή τα τρίγωνα ΦΟΣ και ΚΠΣ είναι όμοια ισχύει : $\frac{\text{ΚΠ}}{\text{ΦΟ}} = \frac{\text{ΠΣ}}{\text{ΟΣ}} \Leftrightarrow \frac{1,6}{8} = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow 5s = x+s \Leftrightarrow 4s = x \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}x$ (1)

Τα μεγέθη x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t), s = s(t)$, $x'(t) = 0,8\ m/s$ και ψάχνουμε το $s'(t)$ που είναι η ταχύτητα με την οποία αυξάνει ο ίσκιος της.

Η (1) γίνεται $s(t) = \frac{1}{4}x(t)$ άρα $s'(t) = \frac{1}{4}x'(t) \Leftrightarrow s'(t) = \frac{1}{4}0,8 \Leftrightarrow s'(t) = 0,2\ m/s$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

15) Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $\mathrm{K}(x)$ και η συνολική είσπραξη είναι $\mathrm{E}(x)$, τότε το συνολικό κέρδος είναι $\mathrm{P}(x)=\mathrm{E}(x)-\mathrm{K}(x)$ και το μέσο κόστος είναι $\mathrm{K}_{\mu}(x)=\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x}$.

i. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι ισος με το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης.

ii. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ισο με το οριακό κόστος.

Λύση :

i. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $\mathrm{P}'(x)=\mathrm{E}'(x)-\mathrm{K}'(x)$.
Άρα $\mathrm{P}'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{E}'(x)-\mathrm{K}'(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{E}'(x)=\mathrm{K}'(x)$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι $\mathrm{K}'_{\mu}(x)=\left(\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x}\right)'=\dfrac{\mathrm{K}'(x)\cdot x-\mathrm{K}(x)}{x^2}$

Άρα $\mathrm{K}'_{\mu}(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{K}'(x)\cdot x-\mathrm{K}(x)}{x^2}=0 \Leftrightarrow \mathrm{K}'(x)\cdot x-\mathrm{K}(x)=0 \Leftrightarrow \mathrm{K}'(x)=\dfrac{\mathrm{K}(x)}{x} \Leftrightarrow$
$\mathrm{K}'(x)=\mathrm{K}_{\mu}(x)$.

16) Ένα εργοστάσιο για την κατασκευή x χιλιάδων μονάδων ενός προϊόντος έχει κόστος $\mathrm{K}(x)=\dfrac{1}{3}x^3-60x^2+100x+4$ χιλ. ευρώ. Η είσπραξη από την πώληση των προϊόντων δίνεται από τον τύπο : $\mathrm{E}(x)=-x^3+30x^2-1700x-2$ χιλ. ευρώ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

Λύση :

Το κέρδος $\mathrm{P}(x)$ του εργοστασίου δίνεται από τον τύπο $\mathrm{P}(x)=\mathrm{E}(x)-\mathrm{K}(x) \Leftrightarrow$

$$\mathrm{P}(x)=-x^3+30x^2-1700x-2-\frac{1}{3}x^3+60x^2-100x-4 \Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=-\frac{4}{3}x^3+90x^2-1800x-6$$

Οπότε : $\mathrm{P}'(x)=-4x^2+180x-1800$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός όταν : $\mathrm{P}'(x)>0 \Leftrightarrow -4x^2+180x-1800>0 \Leftrightarrow -x^2+45x-450>0 \Leftrightarrow x\in(15,30)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

17) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(1,2) και Β(x,0) ως προς x, όταν x=1.

18) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του τυχαίου σημείου Μ που ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=e^x$ από την αρχή των αξόνων ως προς x, όταν x=0.

19) Έστω τα σημεία $\mathrm{A}(0,x+1)$ και $\mathrm{B}(\sqrt{x},0)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ,

i. Της απόστασης των σημείων Α και Β ως προς x όταν x=1.

ii. Του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς x όταν x=1.

20) Δίνεται το σημείο Μ(x,y) ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=e^x$, $x>0$. Αν $\mathrm{A}(x^2,0)$, να βρείτε :
   i. Το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΜΟΑ ως συνάρτηση του x.
   ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του τριγώνου ΜΟΑ ως προς x όταν x=1.

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x$ και ε η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη της f στο σημείο $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha>1$. Να βρείτε :
   i. Την εξίσωση της ε
   ii. Τα σημεία τομής Α, Β της ε με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.
   iii. Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς α όταν α=e.

22) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\alpha=x^2$ και $\beta=e^{2x}$ ως προς x όταν x=1.

23) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x=x(t)=-t^3+12t^2-36t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
   i. Να βρείτε την ταχύτητα και στη συνέχεια την ταχύτητα τη χρονική στιγμή t=1s
   ii. Να βρείτε την επιτάχυνση και στη συνέχεια την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t=2s
   iii. Πότε το σημείο είναι ακίνητο;
   iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
   v. Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 7s.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3(ax-1)^2$
   i. Να βρείτε το α ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x να μηδενίζει για $x=\frac{1}{2}$.
   ii. Για α=2, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο Α(2,f(2)).

25) Από ένα σφαιρικό μπαλόνι εκλύεται αέριο με ρυθμό και η ακτίνα του δίνεται από τον τύπο ρ(t)=4-t, $t\geq 0$, t σε ώρες και ρ σε cm. Να βρείτε :
   i. Σε πόσο χρόνο η μπάλα θα λιώσει τελείως.
   ii. Τον μέσο ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της όταν $t\in[1,2]$.
   iii. Τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της όταν $t_1=2h$

26) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του τη στιγμή που αυτό είναι ίσο με 36 m^2 .

27) Σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ η πλευρά ΑΒ αυξάνεται με ρυθμό 2 $cm/\sec$, ενώ η πλευρά ΒΓ ελαττώνεται με ρυθμό 3 $cm/\sec$. Να βρείτε :
   i. Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου,
   ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν : ΑΒ=10cm και ΒΓ=6cm.

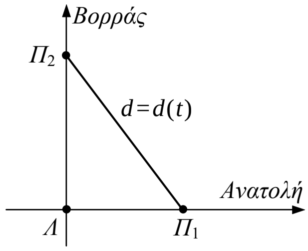
28) Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με σταθερή βάση ΒΓ=16cm μεταβάλλεται με ρυθμό 5 $cm/\sec$. Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο Α απέχει από την πλευρά ΒΓ 6 cm, να βρείτε :
   i. Τον ρυθμό μεταβολής των ίσων πλευρών,
   ii. Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

29) Δυο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται κατά μήκος δυο κάθετων οδών ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητα 50km/h και 100km/h αντίστοιχα. Να βρεθεί :
   i. Μια συνάρτηση που δίνει την απόσταση των δυο αυτοκινήτων σε σχέση με τις αποστάσεις των οχημάτων από το σημείο Γ.
   ii. Η απόσταση των δυο οχημάτων τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το πρώτο όχημα απέχει από τη διασταύρωση 800m και το δεύτερο 600m
   iii. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς τον χρόνο την παραπάνω χρονική στιγμή t_0.

30) Το συνολικό κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $\mathrm{K}(x)=30x^2-1000x-50$ και η συνολική είσπραξη $\mathrm{E}(x)=2x^3-60x^2+200x+100$ σε χιλ €. Να βρείτε τον αριθμό των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παραχθεί ώστε να έχουμε θετικό ρυθμό μεταβολής του κέρδους (κερδοφόρα επιχείρηση).

31) Ο όγκος *V* ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του *r* τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9cm;

32) Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20km/h.



   i. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2
   ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d=(\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

33) Ένα υλικό σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $f(x)=\sqrt{x^2+3},\ x\geq 0$. Όταν το σημείο βρίσκεται στη θέση $\mathrm{M}_1(1,2)$, η τεταγμένη του αυξάνει με ρυθμό $3m/\min$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του, τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $\mathrm{M}_1(1,2)$

34) Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{x-1}+\ln x,\ y\geq 0$, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό $2m/\min$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του είναι ίση με 1.

35) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, $x>0$, έτσι, ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό $1cm/\sec$. Έστω Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΜΒ όπου Α, Β οι προβολές του Μ στους άξονες Οx και Οy αντίστοιχα. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ τη χρονική στιγμή t_0 που το εμβαδόν αυξάνει με ρυθμό $2e\,cm^2/\sec$.

36) Κινητό σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln x$. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο Μ βρίσκεται στον άξονα x΄x ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του Μ από την ευθεία $y=x$ είναι ίσος με μηδέν. (Να θεωρηθεί γνωστό ότι $x>\ln x$ για κάθε $x>0$.)

37) Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ και καθώς περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(1,1)$ η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

38) Ένα υλικό σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $f(x)=\sqrt{x}$ έτσι, ώστε τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του είναι ίση με 2, η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό $4m/\min$.

i. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης d=OM όπου Ο η αρχή των αξόνων την παραπάνω χρονική στιγμή.
ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=\mathrm{M}\hat{\mathrm{O}}x$ την παραπάνω χρονική στιγμή.

39) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=(x-1)^2$. Η τετμημένη του Μ είναι θετική και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ρυθμό $2cm/\sec$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ με τον άξονα x΄x όταν αυτή είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): x-y+2022=0$, καθώς και την τετμημένη x του Μ την ίδια χρονική στιγμή.

40) Ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, έτσι, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $\alpha(t)$ να είναι $\alpha'(t)=\alpha^2(t)$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και Α το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα y΄y. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Α, όταν το σημείο Μ έχει τετμημένη 2.

41) Μια κάμερα είναι τοποθετημένη στην κορυφή ενός στύλου ύψους 3m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ υπό την οποία η κάμερα παρακολουθεί ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα 40km/h, όταν αυτό :

i. έχει απομακρυνθεί από το στύλο κατά 4m,
ii. Σε 4m θα έχει διέλθει από το στύλο

42) Έστω *T* το εμβαδόν του τριγώνου *OAB* που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x>1$. Αν το *x* μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού *T*, όταν $x=5$ cm.

43) Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *y.*